Lineare Algebra für die Naturwissenschaften
Probeprüfung

Aufgabe 1

Betrachte den $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathscr{P}_3$ der Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten von Grade höchstens 3,

$$\mathscr{P}_3 = \{p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 \mid a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}\}$$

und bezeichne mit $[v] = [v^{(0)}, v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ die Standardbasis von $\mathscr{P}_3$,

$$v^{(0)} = 1,\ v^{(1)} = t,\ v^{(2)} = t^2,\ v^{(3)} = t^3.$$

Sei $T : \mathscr{P}_3 \to \mathscr{P}_3$ die Abbildung

$$(Tp)(t) = tp'''(t) + 2p'(t) + 3p(t).$$

(i) Zeige, dass T linear ist.

(ii) Bestimme die Matrixdarstellung $T_{[v]\to[v]}$ von T bezüglich der Basis $[v]$.

(iii) Entscheide, ob T diagonalisierbar ist.

Aufgabe 2

(i) Berechne die Determinante von

$$\begin{pmatrix} i & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1+i & -1+i & 1-i \end{pmatrix}^4.$$

(ii) Berechne den nicht orientierten Winkel zwischen den Vektoren $v = (1, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ und $w = (\sqrt{2}, -1, 1)$ bezüglich des Euklidschen Skalarproduktes in $\mathbb{R}^3$.

(iii) Bestimme die Nullstellen von $p(z) = z^4 - i$.

Aufgabe 3

Betrachte die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(i) Berechne die Eigenwerte von A.

(ii) Bestimme eine orthonormierte Basis $[v]$ von $\mathbb{R}^3$, bestehend aus Eigenvektoren von A.

(iii) Berechne A^{20}.

Aufgabe 4

Betrachte das System von Differentialgleichungen

$$(S)\begin{cases} y_1' &= 3y_1 - 5y_2 + t \\ y_2' &= y_1 - y_2 + 1 \end{cases}.$$

(i) Bestimme die allgemeine reelle Lösung des zugehörigen homogenen Systems.

(ii) Bestimme eine partikuläre reelle Lösung von (S).

(iii) Löse das Anfangswertproblem von (S) mit $y_1(0) = -\frac{3}{2}$, $y_2(0) = 0$.

Aufgabe 5

Betrachte die folgende Differentialgleichung

$$y'' + y' - 2y = 3e^{-2t}.$$

(i) Bestimme die allgemeine reelle Lösung.

(ii) Bestimme die Lösung des Anfangwertproblems mit

$$y(0) = 0, \quad y'(0) = 2.$$

(iii) Bestimme die Lösung der Differentialgleichung für welche $y(0) = 1$ und $\lim_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Aufgabe 6

Welche der folgenden Aussagen sind wahr und welche sind falsch? (Mit Begründung)

(i) Es existieren Vektoren $a^{(1)}, a^{(2)}, a^{(3)}, a^{(4)}$ in $\mathbb{R}^3$, welche linear unabhängig sind.

(ii) Der Kegelschnitt $K_f = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x_1, x_2) = 0\}$ mit

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2 - 15$$

ist eine Ellipse.

(iii) Sei $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ eine lineare Abbildung. Falls $\{Tv \mid v \in \mathbb{R}^3\} \neq \mathbb{R}^3$, dann ist 0 ein Eigenwert von T.