Klausur
Lineare Algebra für die Naturwissenschaften

09 Februar 2021, 10:00-12:00

- Legen Sie während der Prüfung Ihre Legi vor sich auf dem Pult.
- An den Platz mitzunehmen sind nur Schreibutensilien und gegebenenfalls eine kleine Zwischenverpflegung. Deponieren Sie Ihre Taschen, Jacken etc. am Rande des Hörsaales.
- Taschenrechner und Mobiltelephon und sind nicht zugelassen.
- Die Prüfung besteht aus 4 Aufgaben; überprüfen Sie zunächst, ob alle Blätter vorhanden sind. Jedes Blatt ist mit Name und Matrikelnummer zu beschriften. Alle Blätter müssen am Ende der Prüfung in korrekter Reihenfolge mit Büroklammern abgegeben werden.
- Für jede Aufgabe ist auf den Prüfungsblättern (vorne und hinten) und auf den letzten beiden Seiten separat Platz vorhanden. Sollte zusätzliches Schreibpapier benötigt werden, melden Sie sich bei der Klausurleitung. Verwenden Sie in diesem Fall für jede Aufgabe ein neues Blatt Papier und beschriften Sie dieses mit Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer.
- Nur vollständig begründete und hergeleitete Resultate werden gewertet. Für die Note 6 ist es nicht erforderlich, alle Aufgaben richtig zu lösen.
- Verwenden Sie weder Bleistifte noch rotfarbige Stifte.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1. [6 Punkte]
Betrachten Sie die Vektoren in $\mathbb{R}^3$

$$i = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, u = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix},$$

wobei $a, b \in \mathbb{R}$ zwei Parameter sind.
(a) Beweisen Sie, dass (i, u, v) linear unabhängig sind.
(b) Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Erklären Sie zuerst, warum die Matrix A umkehrbar ist; dann berechnen Sie ihre inverse Matrix A^{-1}.
(c) Betrachten Sie den Vektor $w \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $w = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ in der Standardbasis, wobei $x, y \in \mathbb{R}$ zwei reelle Zahlen sind. Finden Sie die Koordinaten $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ von w in der Basis $[i, u, v]$.
(d) Bestimmen Sie x und y so, dass $x' = y' = z'$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2. [6 Punkte]

Man schreibt eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ entweder in euklidischen Koordinaten, dass heisst $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, oder, falls $z \neq 0$, in Polarkoordinaten, dass heisst $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = re^{i\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $(3i - 1)^2$ in euklidischen Koordinaten.

(b) Berechnen Sie die euklidischen Koordinaten von den zwei komplexen Lösungen z_1 und z_2 von der Gleichung

$$z^2 - (3 - i)z + 4 = 0.$$

(c) Drücken Sie z_1 und z_2 in Polarkoordinaten aus.

(d) Berechnen Sie in Polarkoordinaten die Nullstellen von dem Polynom

$$P(z) = z^4 - (3 - i)z^2 + 4, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 3. [11 Punkte]

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, ob A positiv definit ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir bezeichnen als $\langle u, v\rangle$ das übliche (euklidische) Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$; und definieren $Q(u, v) = \langle u, Av\rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie $Q(v, v)$ in Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z von v, dass heisst für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie, ob Q ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist. Ihre Antwort muss begründet sein.

(d) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

(e) Erklären Sie zuerst ohne Berechnung, warum es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. Finden Sie dann eine solche Basis.

(f) Finden Sie eine orthogonale Matrix S und ihre inverse Matrix S^{-1}, sodass die Matrix $S^{-1}AS$ diagonal ist.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4. [4 Punkte]
Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) & = 2x(t) - 2y(t) \ , \\ y'(t) & = -2x(t) - y(t) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit Anfangswerten $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$.