Aufgabe 1

(a) $\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \neq 0 \Rightarrow (i, u, v)$ lineare unabhängige

(b) $\operatorname{Det} A = 2 \neq 0 \Rightarrow A$ ist umkehrbar.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & b & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & a & 0 & 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right)$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -a & (ab-1)/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -b/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \end{array}\right) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a & (ab-1)/2 \\ 0 & 1 & -b/2 \\ 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}$$

(c) $$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - ay + ab - 1 \\ y - b \\ 1 \end{pmatrix}$$

(d) $x - ay + ab - 1 = y - b = 1$

$y = b + 1 \qquad x = 2 + a.$

Auch $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ mit $x' = y' = z'$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' + a x' + x' \\ x' + b x' \\ 2 x' \end{pmatrix} \Rightarrow x' = 1, \quad \begin{array}{l} x = a + 2 \\ y = 1 + b. \end{array}$$

Aufgabe 2

(a) $(3i-1)^2 = -9-6i+1 = -8-6i$

(b) $\Delta = (3-i)^2 - 16 = 9-6i+1-16 = -8-6i = (3i-1)^2$

$$z_1 = \frac{3-i+3i-1}{2} = 1+i$$

$$z_2 = \frac{3-i-3i+1}{2} = 2-2i$$

(c) $z_1 = \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} + i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$z_2 = \sqrt{8}\left(\frac{1}{\sqrt{2}} - i\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \sqrt{8}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\pi/4\right)\right)$

(d) $P(z) = 0 \iff z^2 = z_1$ oder $z^2 = z_2$

Deswegen die Nullstellen von P sind

$2^{1/4} e^{i\pi/8}$, $2^{1/4} e^{i9\pi/8}$, $8^{1/4} e^{-i\pi/8}$, $8^{1/4} e^{i7\pi/8}$.

Augabe 3

(a) A ist symmetrisch. $\det(1) = 1 > 0$, $\det\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix} = 1 > 0$

$\det\begin{pmatrix}1&0&2\\0&1&0\\2&0&1\end{pmatrix} = 1-4 = -3 < 0$. Deswegen nicht positiv definit.

(b) $Q(v,v) = \left\langle \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x+2z\\y\\2x+z\end{pmatrix} \right\rangle = x^2 + 2xz + y^2 + 2xz + z^2$

$Q(v,v) = x^2 + 4xz + y^2 + z^2$.

(c) Q ist kein Skalarprodukt weil A ist nicht definit positiv.

(d) $P(z) = \begin{pmatrix}1-z&0&2\\0&1-z&0\\2&0&1-z\end{pmatrix} = (1-z)^3 - 4(1-z)$

$= (1-z)(z^2-2z+1-4)$

$= (1-z)(z^2-2z-3)$

$= (1-z)(z+1)(z-3)$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = 3$

Algebraische Multiplizität = Geometrische Multiplizität = 1 für alle Eigenwerten.

(e) A ist symmetrisch $\to$ es folgt, dass $\exists$ Orthonormal Basis von Eigenvektoren.

- Klar, dass $u_1 = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ ist ein Eigenvektor für den Eigenwert $\lambda_1 = 1$
- $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$ Eigenvektor für $\lambda_2 = -1$, mit Norm $\sqrt{2} \Rightarrow$

$u_2 = \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\-1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ist ein normiert Eigenvektor für λ_2

- $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ Eigenvektor für $\lambda_3 = 3$, Norm $= \sqrt{2} \Rightarrow$

$u_3 \begin{pmatrix}1/\sqrt{2}\\0\\1/\sqrt{2}\end{pmatrix}$ ist ein normiert Eigenvektor für λ_3.

$[u_1, u_2, u_3]$ ist eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren

(f) $$S = \begin{pmatrix} 0 & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$S^{-1} = S^{*} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$ weil S orthog.

Aufgabe 4

(a) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

so dass $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Wir berechnen die Eigenwerten von A $\lambda_1 = 3$, $\lambda_2 = -2$

und finden Eigenvektoren $v_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

Die generelle Lösung ist deswegen

$$x(t) = -2c_1 e^{3t} + c_2 e^{-2t}$$
$$y(t) = c_1 e^{3t} + 2c_2 e^{-2t}$$

(b) $x(0) = 0$ & $y(0) = 1$ $\Leftrightarrow$ $\begin{cases} -2c_1 + c_2 = 0 \\ c_1 + 2c_2 = 1 \end{cases}$

$c_2 = 2/5$ $c_1 = 1/5$

$$x(t) = -\frac{2}{5} e^{3t} + \frac{2}{5} e^{-2t}$$
$$y(t) = \frac{1}{5} e^{3t} + \frac{4}{5} e^{-2t}$$