Aufgabe 1

(a) $\begin{cases} \langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle = a + 2b + 2 = 0 \\ \langle v^{(1)}, v^{(3)} \rangle = 2a + 2 + c = 0 \\ \langle v^{(2)}, v^{(3)} \rangle = 2 + b + 2c = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -2b - 2 \\ -4b - 4 + 2 + c = 0 \\ 2 + b + 2c = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} a = -2b - 2 \\ c = 4b + 2 \\ 6 + 9b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 4/3 - 2 = -2/3 \\ c = -8/3 + 2 = -2/3 \\ b = -2/3 \end{cases}$

Wir schliessen, dass $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ paarweise orthogonal sind, wann genau $a = b = c = -2/3$.

(b) 1. $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \times (-2) - 2 \times (-4) + 1 = 8 \neq 0$$

Deswegen ist $[V]$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$.

2. $\mathrm{Id}_{[V],[e]} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ und $\mathrm{Id}_{[e],[V]} = \mathrm{Id}_{[V],[e]}^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{(3) \to (3) - 2(1)} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$-\frac{1}{4} \times (3) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1/4 \end{array}\right) \overset{(2) \to (2) - (3)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -1/2 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

$$\frac{1}{2} \times (2) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1/2 & 1 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/4 \end{array}\right) \overset{(1) \to (1) - \frac{1}{2}(2) - 2(3)}{\rightsquigarrow} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1/8 & -1/4 & 7/16 \\ 1 & 0 & 0 & -1/4 & 1/2 & 1/8 \\ 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & -1/4 \end{array}\right)$$

Schlussendlich $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/4 & 1/2 & 1/8 \\ 1/8 & -1/4 & 7/16 \\ 1/2 & 0 & -1/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x/4 + y/2 + z/8 \\ x/8 - y/4 + 7z/16 \\ x/2 - z/4 \end{pmatrix}$

Aufgabe 2

(a) Die Anzahl der Nullstellen von P ($\{z : P(z)=0\}$) mit deren Multiplizitäten ist gleich n.

(b) Mitternachtsformel $\Delta = 4-8 = -4$

$$z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1+i \qquad z_2 = \frac{2-2i}{2} = 1-i$$

$$|z_1| = \sqrt{2} \qquad \frac{z_1}{|z_1|} = \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{i\pi/4}$$

$$z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$$

$$|z_2| = \sqrt{2} \qquad \frac{z_2}{|z_2|} = \frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{i}{\sqrt{2}} = e^{-i\pi/4}$$

$$z_2 = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4}$$

(c) $Q(z) = P(z^2)$, darum sind die Nullstellen von Q die (quadratischen) Wurzeln von z_1 und z_2. Wir bekommen

$$2^{1/4} e^{i\pi/8}, \quad 2^{1/4} e^{-i7\pi/8}, \quad 2^{1/4} e^{-i\pi/8}, \quad 2^{1/4} e^{i7\pi/8}.$$

Aufgabe 3

(a) Charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda+1 & -1 & 0 \\ -1 & \lambda & 1 \\ 0 & 1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda - 2$

$= (\lambda - 1)(\lambda^2 + 3\lambda + 2) = (\lambda-1)(\lambda+1)(\lambda+2)$.

Eigenwerte $1, -1, -2$. Alle einfache: algebraische und geometrische Multiplizitäten $= 1$.

(b) A ist symmetrisch, deswegen gibt es eine orthonormale Basis von Eigenvektoren. Sei $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ Eigenvektor

Für $\underline{\lambda = 1}$ $\begin{cases} -x + y = x \\ x - z = y \\ -y - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 2x \\ -y = 2z \end{cases}$ so $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor

und $v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \\ -1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$ hat Norm 1.

Für $\underline{\lambda = -1}$ $\begin{cases} -x + y = -x \\ x - z = -y \\ -y - z = z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = z \end{cases} \Rightarrow v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

ist Eigenvektor mit Norm 1.

Für $\underline{\lambda = -2}$ $\begin{cases} -x + y = -2x \\ x - z = -2y \\ -y - z = -2z \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + y = 0 \\ -y + z = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ ist

ein Eigenvektor und $v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ Eigenvektor mit Norm 1.

(c) $S = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \\ 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} & 2/\sqrt{6} & -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

Aufgabe 4 $\quad A$ ist symmetrisch

(a) Sylvester's Satz. $|A_1| = 2 > 0$, $|A_2| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 > 0$

aber $|A| = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1 < 0$.

Wir schließen, dass A nicht positiv definite ist.

(b) Q ist ein Skalarprodukt wenn genau

- (Symmetrie) $Q(u,v) = Q(v,u)$ ok, weil A symmetrisch ist
- [Linearität] $Q(u+v,w) = Q(u,w) + Q(v,w)$ ok und $Q(\lambda u, v) = \lambda Q(u,v)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $u,v,w \in \mathbb{R}^3$ auch ok
- [Positivität] $Q(v,v) \geq 0$ für alle $v \in \mathbb{R}^3$ und $Q(v,v) = 0 \Leftrightarrow v = 0$. Nicht ok, weil A nicht positiv definit ist. Es gibt einen Eigenwert $\lambda \leq 0$ und $v \neq 0$ Eigenvektor mit $Q(v,v) = \lambda \langle v, v \rangle \leq 0$.

Q ist kein Skalarprodukt!

(c) $Q(v,v) = x(2x+y) + y(x+y-z) + z(-y+z)$
$$= 2x^2 + 2xy + y^2 - 2yz + z^2$$

Aufgabe 5

(a) Wir betrachten die Matrix $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

Charakteristisches Polynom $P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-3 & -2 \\ -1 & \lambda-2 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 4$

Eigenwerten $\lambda_1 = 1$ & $\lambda_2 = 4$, mit Eigenvektoren

$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ und $v^{(2)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Deswegen ist die allgemeine Lösung

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a e^t + 2b e^{4t} \\ -a e^t + b e^{4t} \end{pmatrix} \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(b) $\begin{cases} y_1(0) = 0 \\ y_2(0) = 3 \end{cases} \iff \begin{cases} a + 2b = 0 \\ -a + b = 3 \end{cases} \iff a = -2 \ \& \ b = 1$

Wir schliessen, dass $y_1(t) = -2e^t + 2e^{4t}$, $y_2(t) = 2e^t + e^{4t}$.