Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1.
Betrachten Sie die Matrix mit komplexen Koeffizienten

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & -1 \\ -i & 1+i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A und von A^2.

(b) Erklären Sie warum A invertierbar ist, und berechnen Sie dann ihre inverse Matrix A^{-1}.

(a) $\operatorname{Det} A = i$, $\operatorname{Det}(A^2) = (\operatorname{Det} A)^2 = -1$

(b) $\operatorname{Det} A \neq 0$, therefore invertible

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} i & -i & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -i & i+1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} i & -i & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1-i & 1 & -i \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1-i & 1 & -i \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2.
Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei Parameter sind:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ c \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a, b, und c sind die Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ paarweise orthogonal (das heisst, $v^{(i)}$ und $v^{(j)}$ sind orthogonal für alle $1 \leq i < j \leq 3$)?

(b) Wir nehmen jetzt an, dass $a = b = c = 0$.

1. Überprüfen Sie, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Standardbasis. Finden Sie die Koordinaten $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ von u in der Basis $[v]$.

(a) $\begin{cases} a - b - 1 = 0 & v^{(1)} \perp v^{(2)} \\ 2a + 1 + c = 0 & v^{(1)} \perp v^{(3)} \\ 2 - b - c = 0 & v^{(2)} \perp v^{(3)} \end{cases}$

$\begin{cases} a = b+1 \\ c = -2b-3 \\ b = -5 \end{cases} \Rightarrow c = 7 \ \& \ a = -4$

Hence $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ pairewise $\perp \Leftrightarrow a = -4,\ b = -5,\ c = 7$.

(b) 1. $\det \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$ hence Basis von $\mathbb{R}^3$.

2. $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ $\quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} -1/3 & -2/3 & -1/3 \\ 1/3 & 2/3 & -2/3 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

$x' = -x/3 - 2y/3 - z/3$
$y' = x/3 + 2y/3 - 2z/3$
$z' = x/3 - y/3 + z/3$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3.

Seien a, b reellen Zahlen.
Wir betrachten die 3×3 Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a \\ ab & b^2 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Erklären Sie zuerst ohne Berechnung, warum es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ gibt, die aus Eigenvektoren von M besteht.

(b) Zeigen Sie, dass

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M ist und bestimmen Sie seinen Eigenwert.

(c) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit $v \neq (0,0,0)$, der orthogonal zur u ist.

Überprüfen Sie, dass v ein Eigenvektor von M für den Eigenwert 0 ist.

(d) Bestimmen Sie die geometrische Multiplizität des Eigenwertes 0.

(a) M is symmetric, therefore there is an orthonormal basis of eigenvectors

(b) $$Mu = \begin{pmatrix} a^3 + ab^2 + a \\ a^2b + b^3 + b \\ a^2 + b^2 + 1 \end{pmatrix} = (a^2+b^2+1)\begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

Eingenvalue a^2+b^2+1

(c) $$Mv = \begin{pmatrix} a^2x + aby + az \\ abx + b^2y + bz \\ ax + by + z \end{pmatrix} \quad \text{for } v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$u \perp v \iff ax + by + z = 0$ and we then have $Mv = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

(d) The orthogonal space of u has dimension 2.

Thus the geometric multiplicity of the eigenvalue 0 equals 2.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4.
Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen wahr sind und welche falsch sind (geben Sie eine kurze Begrüdung).

1. Es gibt eine reguläre (invertierbare) Matrix in $\mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Eigenwert 0.
2. Es gibt eine symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{d\times d}$ mit imaginärem Eigenwert i.
3. Die Abbildung $q : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ mit $q(x, y, z) = (x - y)^2 + 2(x + z)^2 + y^2$ ist eine positiv definite quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$.
4. Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
ist positiv definit.

1. False, if 0 is an eigenvalue, then M is not invertible

2. False: real symmetric matrices have real eigenvalues

3. q is quadratic ≥ 0, $q(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2 = 0 \\ (x+z)^2 = 0 \\ y^2 = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x = y = z = 0$
Thus positive definit

4. $\det A = -11$ thus not positive definit

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5.
Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \ , \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 1$.

(a) $\begin{vmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 1 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 1 - 2$ so the two eigenvalues are

$\lambda_1 = \sqrt{3}$ and $\lambda_2 = -\sqrt{3}$

An eigenvector for λ_1 is $\begin{pmatrix} \sqrt{3}+1 \\ 1 \end{pmatrix}$ and for λ_2 $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$

Thus the general solution is

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = a\, e^{\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} + b\, e^{-\sqrt{3}t} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{cases} a(1+\sqrt{3}) + b(1-\sqrt{3}) = 1 \\ a + b = 1 \end{cases} \Rightarrow a = b = 1/2$

$$y_1(t) = \frac{1}{2}(1+\sqrt{3})\, e^{\sqrt{3}t} + \frac{1}{2}(1-\sqrt{3})\, e^{-\sqrt{3}t}$$

$$y_2(t) = \frac{1}{2} e^{\sqrt{3}t} + \frac{1}{2} e^{-\sqrt{3}t}$$