Klausur
Lineare Algebra für die Naturwissenschaften

06 Februar 2020, 10:00-12:00

- Legen Sie während der Prüfung Ihre Legi vor sich auf dem Pult.
- An den Platz mitzunehmen sind nur Schreibutensilien und gegebenenfalls eine kleine Zwischenverpflegung. Deponieren Sie Ihre Taschen, Jacken etc. am Rande des Hörsaales.
- Taschenrechner, Mobiltelephon und Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Die Prüfung besteht aus 5 Aufgaben und insgesamt 8 Blättern - einem Deckblatt, 5 Aufgabenblättern sowie 2 leere Blätter am Ende. Überprüfen Sie zunächst, ob alle Blätter vorhanden sind. Jedes Blatt ist mit Name und Matrikelnummer zu beschriften. Alle 8 Blätter müssen am Ende der Prüfung in korrekter Reihenfolge abgegeben werden.
- Für jede Aufgabe ist auf den Prüfungsblättern (vorne und hinten) und auf den letzten beiden Seiten separat Platz vorhanden. Sollte zusätzliches Schreibpapier benötigt werden, melden Sie sich bei der Klausurleitung. Verwenden Sie in diesem Fall für jede Aufgabe ein neues Blatt Papier und beschriften Sie dieses mit Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer.
- Nur vollständig begründete und hergeleitete Resultate werden gewertet. Für die Note 6 ist es nicht erforderlich, alle Aufgaben richtig zu lösen.
- Verwenden Sie weder Bleistifte noch rotfarbige Stifte.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1.
(a) Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei Parameter sind:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a, b, und c sind die Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ paarweise orthogonal (das heisst, $v^{(i)}$ und $v^{(j)}$ sind orthogonal für alle $1 \leq i < j \leq 3$)?
(b) Wir nehmen jetzt an, dass $a = 1/2$ und $b = c = 0$.

1. Überprüfen Sie, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Standardbasis. Finden Sie die Koordinaten $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ von u in der Basis $[v]$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 2.

Sei $P(z) = a_n z^n + \cdots + a_1 z + a_0$ ein Polynom in der komplexen Variablen $z \in \mathbb{C}$, wobei die Koeffizienten $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$ und $a_n \neq 0$.

(a) Formulieren Sie den Fundamentalsatz der Algebra.

(b) Wir nehmen jetzt an, dass $P(z) = z^2 - 2z + 2$.

Berechnen Sie die (komplexen) Nullstellen von P, zuerst in euklidischen Koordinaten, und dann in Polarkoordinaten.

(c) Sei $Q(z) = z^4 - 2z^2 + 2$.

Berechnen Sie die Nullstellen von Q in Polarkoordinaten.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

(b) Erklären Sie zuerst ohne Berechnung, warum es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. Finden Sie dann eine solche Basis.

(c) Finden Sie eine reguläre Matrix S und ihre inverse Matrix S^{-1}, sodass die Matrix $S^{-1}AS$ diagonal ist.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4. Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, ob A positiv definit ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir bezeichnen als $\langle u, v \rangle$ das übliche (euklidische) Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$; und definieren $Q(u, v) = \langle u, Av \rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Bestimmen Sie, ob Q ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist. Begründen Sie Ihre Antwort unter Angabe der Definition des Skalarprodukts

(c) Berechnen Sie $Q(v, v)$ in Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z von v, dass heisst für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5.
Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} y_1'(t) & = 3y_1(t) + 2y_2(t) \ , \\ y_2'(t) & = y_1(t) + 2y_2(t) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit Anfangswerten $y_1(0) = 0$ und $y_2(0) = 3$.