Prof. A. Cattaneo
Institut für Mathematik
Universität Zürich

HS 2018

Lineare Algebra für die Naturwissenschaften
Probeprüfung

Regeln

- Die Antworten auf die Fragen müssen klar, verständlich und begründet sein. Unlesbare Lösungen werden nicht korrigiert.
- Die Prüfung dauert zwei Stunden.
- Es sind keine Notizen erlaubt.
- Die Benutzung von elektronischen Hilfsmitteln ist verboten.
- Bitte verwenden Sie keine eigenen Blätter. Melden Sie sich, falls Sie mehr Papier brauchen.
- Schreiben Sie Ihre Lösungen unter die Aufgaben. Sie können auch die Rückseite verwenden.
- Schreiben Sie Namen und Matrikelnummer auf jedes Blatt.
- 4 richtig gelöste Aufgabe ergeben die maximale Note.
- Jede Aufgabe gibt die gleiche Anzahl Punkte.

Viel Erfolg!

Exercise	1	2	3	4	5	total
Points						

Name:

Matrikelnummer:

Exercise 1

Decide whether the statements below are true or false. Correct answers count +0.5 points, wrong answers count as -0.5points. If the total for this question is negative it will be counted as 0 points towards the total.

(a) The matrix $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ is orthogonal.

☐ True ☐ False

(b) The equation $z^4 = 1$ has a unique solution in $\mathbb{C}$.

☐ True ☐ False

(c) $(1+i)$ is an eigenvalue of $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

☐ True ☐ False

(d) Let A be a symmetric matrix. Then A^2 is positive semi-definite.

☐ True ☐ False

(e) The matrix $\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ is invertible.

☐ True ☐ False

(f) The argument of i is $\pi/2$.

☐ True ☐ False

(g) The set $W = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(0) = 1\}$ is a subvectorspace of $V = \{f \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$.

☐ True ☐ False

(h) The eigenvalues of $\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ are $\cos\theta, \sin\theta$.

☐ True ☐ False

Name:

Matrikelnummer:

Exercise 2 (Bases and coordinates)
Consider the three vectors

$$v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} v_3 = \begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$$

(a) Show that $[v] = [v_1, v_2, v_3]$ is a basis of $\mathbb{R}^3$.

(b) Let $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be the linear map whose matrix in the standard basis is

$$T_{[e]\to[e]} = \begin{pmatrix}2 & 0 & 0\\0 & 0 & 1\\0 & -1 & 0\end{pmatrix}$$

Find the representation of T with respect to the basis $[v]$.

Name:

Matrikelnummer:

Exercise 3 (Linear System)
Consider the linear system

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 & = 1 \\ x_2 + x_3 & = 1 \\ 2x_2 + \lambda x_3 & = 2 \end{cases}$$

depending on a parameter $\lambda \in \mathbb{R}$.

(a) For which values of λ does this system have a unique solution?

(b) Let $\lambda = 2$. Give the set of solutions of the system.

Name:

Matrikelnummer:

Exercise 4 (Diagonalization)
Consider the matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Find all eigenvalues of A and their algebraic and geometric multiplicities.

(b) Find an orthonormal basis of $\mathbb{R}^3$ of eigenvectors of A.

(c) Find an invertible matrix S such that SAS^{-1} is a diagonal matrix.

Name:

Matrikelnummer:

Exercise 5 (ODEs)
Consider the system of ODEs

$$\begin{cases} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 \end{cases}$$

(a) Give the general solution of this system of ODEs.

(b) Solve the corresponding initial value problem with $y_1(0) = 2, y_2(0) = 3$.