Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 1. [6 Punkte]
Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ a^2 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind diese Vektoren linear abhängig ?
(b) Für welche Werte von a ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis ?
(c) Wir nehmen jetzt $a = 0$.
Zuerst erklären Sie, warum $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
Dann sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der standard Basis.
Geben Sie die Koordinaten von u in der Basis $[v]$.

(a) $\mathrm{Det}(v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & -1 & 1 \\ a^2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a^2 + a - 1$

$\mathrm{Det} = 0 \iff a = -1$ oder $a = 1/2$

(b) $\langle v^{(1)}, v^{(3)} \rangle = 1 + a = 0 \iff a = -1$. Aber dann $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ sind abhängig. Wir schliessen, dass $[v]$ ist niemals eine Orthogonalbasis

(c) $a = 0$, $[v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ sind unabhängig (Danke (a)). Deswegen $[v]$ ist eine Basis.

$$u = x v^{(1)} + y v^{(2)} + z v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist umkehrbar mit Inversmatrix

$\begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Wir bekommen $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2. [6 Punkte]
Man schreibt eine komplexe Zahl $z \in \mathbb{C}$ entweder in euklidischen Koordinaten, dass heisst $z = x + iy$ mit $x, y \in \mathbb{R}$, oder, falls $z \neq 0$, in Polarkoordinaten, dass heisst $z = r\cos(\theta) + ir\sin(\theta) = re^{i\theta}$ mit $r > 0$ und $\theta \in \mathbb{R}$.

(a) Berechnen Sie $(2i + 1)^2$ in euklidischen Koordinaten.

(b) Berechnen Sie die euklidischen Koordinaten von den zwei komplexen Lösungen z_1 und z_2 von der Gleichung

$$z^2 - z + 1 - i = 0.$$

(c) Drücken Sie z_1 und z_2 in Polarkoordinaten aus.

(d) Berechnen Sie in Polarkoordinaten die Nullstellen von dem Polynom

$$P(z) = z^4 - z^2 + 1 - i, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

(a) $(2i+1)^2 = -4 + 4i + 1 = -3 + 4i$

(b) $\Delta = 1 - 4 + 4i = -3 + 4i = (2i+1)^2$

$z_1 = \dfrac{1 + 2i + 1}{2} = 1 + i \quad , \quad z_2 = \dfrac{1 - 2i - 1}{2} = -i$

(c) $|z_1| = \sqrt{2} \qquad z_1 = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4} \quad ; \quad z_2 = e^{-i\pi/2}$

(d) $P(z) = 0 \iff z^2 = z_1$ oder $z^2 = z_2$

$\iff z = 2^{1/4} e^{i\pi/8}$ oder $z = -2^{1/4} e^{i\pi/8}$

oder $z = e^{-i\pi/4}$ oder $z = -e^{-i\pi/4}$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3. [11 Punkte]
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimmen Sie, ob A positiv definit ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) Wir bezeichnen als $\langle u, v\rangle$ das übliche (euklidische) Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$; und definieren $Q(u,v) = \langle u, Av\rangle$ für alle $u, v \in \mathbb{R}^3$.

Berechnen Sie $Q(v,v)$ in Abhängigkeit von den Koordinaten x, y, z von v, dass heisst für $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

(c) Bestimmen Sie, ob Q ein Skalarprodukt auf $\mathbb{R}^3$ ist. Ihre Antwort muss begründet sein.

(d) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

(e) Erklären Sie zuerst ohne Berechnung, warum es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. Finden Sie dann eine solche Basis.

(f) Finden Sie eine orthogonale Matrix S und ihre inverse Matrix S^{-1}, sodass die Matrix $S^{-1}AS$ diagonal ist.

(a) A ist symmetrisch. $\operatorname{Det} A = -2$. Deswegen nicht positive definit.

(b) $Q(v,v) = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x+y \\ x+z \\ y+z \end{pmatrix} \right\rangle = x^2 + xy + xy + yz + zy + z^2$
$= x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2yz$

(c) A ist nicht positiv definit $\Leftrightarrow$ Q ist kein Skalarprodukt.

(d) $P(\lambda) = \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 2\lambda^2 + \lambda - 2$

$\lambda = 1$ ist eine bestimmte Lösung von $P(\lambda) = 0$
$P(\lambda) = -(\lambda - 1)(\lambda^2 + 2\lambda - 2)$. Die andere Nullstellen sind $\lambda = 2$ und $\lambda = -1$. So Eigenwerten $2, 1, -1$.
Alle haben algebraische Multiplizität 1, deswegen auch geometrische Multiplizität 1.

(e) A ist symmetrisch $\Rightarrow$ es gibt eine Orthonormalbasis von Eigenvektoren.

Eigenvektor für $\lambda_1 = 1$ $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normalisierung $v_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$

Eigenvektor für $\lambda_2 = -1$ $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normalisierung $v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{6} \\ -2/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \end{pmatrix}$

Eigenvektor für $\lambda_3 = 2$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ Normalisierung $v_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

(f) $S = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 0 & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ $S^{-1} = S^T = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$S^{-1} A S = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4. [4 Punkte]
Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} x'(t) & = x(t) + y(t) \ , \\ y'(t) & = x(t) - y(t) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.
(b) Finden Sie die Lösung mit Anfangswerten $x(0) = 0$ und $y(0) = 1$.

(a) Wir betrachten $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Charakteristische polynom

$P(\lambda) = \lambda^2 - 2 \Rightarrow$ Eigenwerten $\sqrt{2}$ und $-\sqrt{2}$

Man findet die Eigenvektoren $\begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$

Die allgemeine Lösung ist

$$a e^{\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} + b e^{-\sqrt{2}t} \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

(b) $\begin{cases} a(1+\sqrt{2}) + b(1-\sqrt{2}) = 0 \\ a + b = 1 \end{cases}$

$a - b = -1/\sqrt{2} \Rightarrow b = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

$a = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$