Probeprüfung
Lineare Algebra für die Naturwissenschaften

Aufgabe 1.

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie, die Determinante $\det(A)$.

(b) Finden Sie die Umkehrsmatrix A^{-1}.

Aufgabe 2.

Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wobei $a \in \mathbb{R}$ ein Parameter ist:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ -a^2 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a sind diese Vektoren linear abhängig ?

(b) Für welche Werte von a ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis ?

(c) Sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $u = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ in der standard Basis. Wir nehmen jetzt $a = 0$.

Überprüfen Sie, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist und geben Sie die Koordinaten von u in der Basis $[v]$.

Aufgabe 3.

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

(b) Erklären Sie zuerst ohne Berechnung warum es gibt eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ die aus Eigenvektoren von A besteht. Dann finden Sie eine solche Basis.

(c) Finden Sie eine reguläre Matrix S mit inverse Matrix S^{-1}, sodass die Matrix $S^{-1}AS$ diagonale sei.

Aufgabe 4.

Betrachten Sie die symmetrische Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 6 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie ob A positive definite ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 5.

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \ , \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) - y_2(t) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 2$.