Klausur
Lineare Algebra für die Naturwissenschaften

06 Februar 2018, 10:00-12:00

- Legen Sie während der Prüfung Ihre Legi vor sich auf dem Pult.
- An den Platz mitzunehmen sind nur Schreibutensilien und gegebenenfalls eine kleine Zwischenverpflegung. Deponieren Sie Ihre Taschen, Jacken etc. am Rande des Hörsaales.
- Taschenrechner, Mobiltelephon und Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Die Prüfung besteht aus 5 Aufgaben und insgesamt 8 Blättern - einem Deckblatt, 5 Aufgabenblättern sowie 2 leere Blätter am Ende. Überprüfen Sie zunächst, ob alle Blätter vorhanden sind. Jedes Blatt ist mit Name und Matrikelnummer zu beschriften. Alle 8 Blätter müssen am Ende der Prüfung in korrekter Reihenfolge abgegeben werden.
- Für jede Aufgabe ist auf den Prüfungsblättern (vorne und hinten) und auf den letzten beiden Seiten separat Platz vorhanden. Sollte zusätzliches Schreibpapier benötigt werden, melden Sie sich bei der Klausurleitung. Verwenden Sie in diesem Fall für jede Aufgabe ein neues Blatt Papier und beschriften Sie dieses mit Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer.
- Nur vollständig begründete und hergeleitete Resultate werden gewertet. Für die Note 6 ist es nicht erforderlich, alle Aufgaben richtig zu lösen.
- Verwenden Sie weder Bleistifte noch rotfarbige Stifte.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1.

(a) Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei Parameter sind:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ c \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von a, b, und c sind die Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ paarweise orthogonal (das heisst, $v^{(i)}$ und $v^{(j)}$ sind orthogonal für alle $1 \leq i < j \leq 3$)?

(b) Wir nehmen jetzt an, dass $a = b = c = 0$.

1. Überprüfen Sie, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Standardbasis. Finden Sie die Koordinaten $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ von u in der Basis $[v]$.
3. Wie vorher bezeichne $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ die Koordinaten eines Vektors u in der Standardbasis und $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ die Koordinaten von u in der Basis $[v]$.

   Sei V die Menge von Vektoren u, deren Koordinaten die Bedingung

   $$x' = -x \ , \ y' = -y \ , \ z' = -z$$

   erfüllen.

   Überprüfen Sie, dass V eine lineare Ebene ist, und bestimmen Sie eine Basis von V (geben Sie die Koordinaten von den Vektoren dieser Basis in der Standardbasis von $\mathbb{R}^3$).

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2.
Sei $A \in \mathbb{R}^{d \times d}$ eine quadratische Matrix mit reellen Koeffizienten.
(a) Sei A^{T} die transponierte Matrix von A.

1. Definieren Sie den Begriff *symmetrische Matrix* mithilfe von A und A^{T}.
2. Definieren Sie den Begriff *orthogonal Matrix* mithilfe von A und A^{T}.

(b) Wir nehmen an, dass A symmetrisch und orthogonal ist. Zeigen Sie, dass die Determinante von A entweder gleich 1 oder -1 ist.

[Hinweis: man kann Eigenschaften von Determinanten und Matrizen Produkten benützen und zeigen, dass $(\det A)^2 = 1$.]

(c) Wir nehmen immer noch an, dass A symmetrisch und orthogonal ist. Sei $\lambda \in \mathbb{C}$ ein Eigenwert von A. Zeigen Sie, dass entweder $\lambda = 1$ oder $\lambda = -1$.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 3.
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

(b) Erklären Sie zuerst ohne Berechnung warum es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ gibt, die aus Eigenvektoren von A besteht. Finden Sie dann eine solche Basis.

(c) Finden Sie eine reguläre Matrix S und ihre inverse Matrix S^{-1}, sodass die Matrix $S^{-1}AS$ diagonal ist.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 4.
Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

und A^{T} die transponierte Matrix von A.

(a) Berechnen Sie, die Matrix $B = A^{\mathrm{T}}A$.

(b) Bestimmen Sie ob B positive definite ist. Begründen Sie Ihre Antwort.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5.
Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \ , \\ y_2'(t) &= 2y_1(t) + y_2(t) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit Anfangswerten $y_1(0) = -1$ und $y_2(0) = 3$.