Musterlösung Probeprüfung

Lineare Algebra für die Naturwissenschaften

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$?

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis ist (vgl. **(b)**). Skalieren Sie die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ so, dass die skalierten Vektoren eine ON-Basis bilden, und bestimmen Sie die Koordinaten von

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser ON-Basis.

(d) Seien $a = 1$ und $b = 0$. Bestimmen Sie den nicht-orientierten Winkel zwischen $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$.

Lösung:

(a) Es ist

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & a \\ 1 & 1 & b \end{pmatrix} = 1 \cdot (2b - a) - 1 \cdot (-b - a) + 1 \cdot (-1 - 2) = 3b - 3.$$

Damit ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis genau dann, wenn $3b - 3 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq 1$.

(b) Wir rechnen nach, dass $\langle v^{(1)}, v^{(2)} \rangle = 0$. Es müssen a, b also so gewählt werden, dass $\langle v^{(1)}, v^{(3)} \rangle = 0$ und $\langle v^{(2)}, v^{(3)} \rangle = 0$. Es gilt $\langle v^{(1)}, v^{(3)} \rangle = 1 - a + b$ und $\langle v^{(2)}, v^{(3)} \rangle = 1 + 2a + b$. Wir müssen also das folgende GLS lösen:

$$\begin{aligned} -a + b &= -1 \\ 2a + b &= -1. \end{aligned}$$

Mit dem Gaussverfahren erhalten wir

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{array}\right).$$

Damit ist $[v]$ eine Orthogonalbasis genau dann, wenn $a = 0$ und $b = -1$.

(c) Wir skalieren die Orthogonalbasis aus **(b)** so, dass alle Vektoren die Norm gleich 1 erhalten:

$$w^{(1)} := \frac{v^{(1)}}{||v^{(1)}||} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad w^{(2)} := \frac{v^{(2)}}{||v^{(2)}||} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, w^{(3)} := \frac{v^{(3)}}{||v^{(3)}||} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Damit ist $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}, w^{(3)}]$ eine ON-Basis. Die Koordinaten von u bezüglich $[w]$ sind dann

$$\begin{pmatrix} \langle u, w^{(1)} \rangle \\ \langle u, w^{(2)} \rangle \\ \langle u, w^{(3)} \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{4}{\sqrt{6}} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(d) Sei φ dieser Winkel. Dann gilt

$$\cos(\varphi) = \frac{\langle v^{(2)}, v^{(3)} \rangle}{||v^{(2)}||\,||v^{(3)}||} = \frac{3}{\sqrt{6}\sqrt{2}} = \frac{3}{2\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Damit folgt $\varphi = \frac{\pi}{6}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $K_3[x]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3 sowie die Abbildung

$$T : K_3[x] \to K_3[x], \quad T(p(x)) = p^{'''}(x) - 2\,p^{''}(x) + p^{'}(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass T linear ist.

(b) Betrachten Sie die Basis $[b] = [x^3, x^2 + 2x, x, x + 1]$. Bestimmen Sie $T_{[b]\to[b]}$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension der Bildmenge von T.

Lösung:

(a) Seien $p(x), q(x) \in K_3[x]$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist

$$\begin{aligned}
T(p(x)+q(x)) &= (p(x)+q(x))''' - 2(p(x)+q(x))'' + (p(x)+q(x))' \\
&= p'''(x) + q'''(x) - 2\,p''(x) - 2\,q''(x) + p'(x) + q'(x) = T(p(x)) + T(q(x)), \\
T(\alpha p(x)) &= (\alpha p(x))''' - 2(\alpha p(x))'' + (\alpha p(x))' \\
&= \alpha p'''(x) - 2\alpha p''(x) + \alpha p'(x) = \alpha T(p(x)).
\end{aligned}$$

Damit folgt, dass T linear ist.

(b) Wir bestimmen zuerst $Id_{[e]\to[b]}$, $Id_{[b]\to[e]}$ und $T_{[e]\to[e]}$, wobei $[e] = [x^3, x^2, x, 1]$. Es ist

$$T(x^3) = 6 - 12x + 3x^2, \quad T(x^2) = -4 + 2x, \quad T(x) = 1, \quad T(1) = 0.$$

Damit sieht man, dass

$$T_{[e]\to[e]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Man sieht direkt, dass

$$Id_{[b]\to[e]} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Zudem ist $Id_{[e]\to[b]} = Id^{-1}_{[b]\to[e]}$. Wir rechnen

$$\left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right).$$

Damit gilt $T_{[b]\to[b]} = Id_{[e]\to[b]} T_{[e]\to[e]} Id_{[b]\to[e]}$, also

$$\begin{aligned}
T_{[b]\to[b]} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -12 & 2 & 0 & 0 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 \\ -24 & 4 & -1 & -1 \\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Alternative Lösung: Man überprüft direkt:

$$\begin{aligned}
T(x^3) &= 6 - 12x + 3x^2 &&= 3(x^2+2x) - 24x + 6(x+1)\\
T(x^2+2x) &= -4 + 2x + 2 &&= 4x - 2(x+1)\\
T(x) &= 1 &&= -x + (x+1)\\
T(x+1) &= 1 &&= -x + (x+1)
\end{aligned}$$

Damit kann man dann $T_{[b]\to[b]}$ ablesen:

$$T_{[b]\to[b]} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ -24 & 4 & -1 & -1\\ 6 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(c) Zur Bestimmung der Dimension der Bildmenge betrachten wir $T_{[e]\to[e]}$. Da Zeilenstufenoperation die Dimension der Bildmenge nicht ändern, können wir aus

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 3 & 0 & 0 & 0\\ -12 & 2 & 0 & 0\\ 6 & -4 & 1 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

folgern, dass die Elemente im Bild von T von der Form $ax^2 + bx + c$ sind. Somit ist $[x^2, x, 1]$ eine Basis der Bildmenge, die also die Dimension 3 hat.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische Multiplizitäten.

(b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Ist A invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie die Inverse.

Lösung:

(a)

$$\det\begin{pmatrix}1-z & 1 & 0\\ 1 & -z & 1\\ 0 & 1 & 1-z\end{pmatrix} = (1-z)(z^2-z-1)-1(1-z)$$
$$= z^2-z-1-z^3+z^2+z+z-1 = -z^3+2z^2+z-2$$

Man rät, dass 1 eine Nullstelle von $-z^3+2z^2+z-2$ ist. Wir führen eine Polynomdivision durch

$$(-z^3+2z^2+z-2):(z-1) = -z^2+z+2.$$

Die Nullstellen von $-z^2+z+2$ sind 2 und -2. Somit ist $\chi_A = -(z-1)(z-2)(z+2)$. Die Eigenwerte von A sind also $1,2$ und -2, jeweils zur algebraischen Multiplizität 1.

(b) Ja, es gibt so eine Basis. Da A drei verschiedene Eigenwerte hat, ist A diagonalisierbar (da die geometrische Vielfachheit jedes Eigenwerts mindestens 1 ist, sind geometrische und algebraische Vielfachheit gleich). Zudem ist klar, dass die Basis, zu der A Diagonalgestalt hat, aus diesen Eigenvektoren besteht.

(c) Es ist $\det A = -1-1 = -2 \neq 0$. Somit ist A invertierbar. Wir berechnen die Inverse:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\1&0&1&0&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&0&1&0&0\\0&-1&1&-1&1&0\\0&1&1&0&0&1\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&2&-1&1&1\end{array}\right)$$
$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&0&1&0\\0&1&-1&1&-1&0\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\0&1&0&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\0&0&1&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{array}\right).$$

Also ist

$$A^{-1} = \begin{pmatrix}\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&-\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2}&-\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\\ -\frac{1}{2}&\frac{1}{2}&\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix}1 & i\\ i & 1\end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis, zu der A Diagonalform hat.

Lösung:

Wir bestimmen zuerst die Eigenwerte:

$$\det\begin{pmatrix}1-z & i\\ i & 1-z\end{pmatrix} = (1-z)^2 - i^2 = (1-z)^2+1.$$

Somit sind die Eigenwerte von der Form $1 \pm \omega$ wobei $\omega^2 = -1$, d. h. $\omega = i$. Also sind die Eigenwerte $\lambda_1 = 1 + i$ und $\lambda_2 = 1 - i$. Berechen wir die Eigenräume:

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_1 & i \\ i & 1-\lambda_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -i & i \\ i & -i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit sind Eigenvektoren zu λ_1 von der Form $\begin{pmatrix} x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda_2 & i \\ i & 1-\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i & i \\ i & i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} i & i \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Somit sind Eigenvektoren zu λ_2 von der Form $\begin{pmatrix} -x_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

Somit hat A zu der Basis $[v] = [\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}]$ Diagonalgestalt.

Aufgabe 5

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) - y_2(t)\,. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit $y_1(\log(2)) = 1$, $y_2(\log(2)) = 1$.

Lösung:

(a) Die allgemeine Lösung ist von der Form $y(t) = e^{tA}c$ mit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$. Um e^{tA} zu berechnen, bestimmen wir zuerst die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

$$\det \begin{pmatrix} 1-z & 1 \\ 3 & -1-z \end{pmatrix} = z^2 - 4 = (z-2)(z+2)$$

Die Eigenwerte sind also $2, -2$.

$$\begin{pmatrix} 1-2 & 1 \\ 3 & -1-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert 2.

$$\begin{pmatrix} 1+2 & 1 \\ 3 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Somit ist $\begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 1 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor zum Eigenwert -2.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -\frac{1}{3} & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & 1 & -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{array}\right)$$

Damit können wir e^{tA} angeben:

$$\begin{aligned} e^{tA} &= \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{3} \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{2t} & 0 \\ 0 & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ -\frac{3}{4} & \frac{3}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} e^{2t} & -\frac{1}{3}e^{-2t} \\ e^{2t} & e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Die allgemeine Lösung ist somit von der Form

$$y(t) = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}.$$

(b) Es ist

$$\begin{aligned} e^{-\log(2)A} &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3e^{-2\log(2)} + e^{2\log(2)} & e^{-2\log(2)} - e^{2\log(2)} \\ 3e^{-2\log(2)} - 3e^{2\log(2)} & e^{-2\log(2)} + 3e^{2\log(2)} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 \cdot 2^{-2} + 2^2 & 2^{-2} - 2^2 \\ 3 \cdot 2^{-2} - 3 \cdot 2^2 & 2^{-2} + 3 \cdot 2^2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 19 & -15 \\ -45 & 49 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$e^{-\log(2)A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Die Lösung des Anfangswertproblems ist somit

$$\begin{aligned} e^{(t-\log(2))A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} &= e^{tA} e^{-\log(2)A} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix} = \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 3e^{2t} + e^{-2t} & e^{2t} - e^{-2t} \\ 3e^{2t} - 3e^{-2t} & e^{2t} + 3e^{-2t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{4}e^{2t} \\ \frac{1}{4}e^{2t} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Aufgabe 6

Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Seien $A \in U(2)$ und λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Dann gilt $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \pm 1$.

falsch: Man prüft leicht, dass $A = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in U(2)$ (mit Hilfe von $A\overline{A}^T = Id$). Jedoch sind die Eigenwerte von A gleich $i, 1$. Somit ist $i \cdot 1 = i \neq \pm 1$.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot B = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Dann sind A und B diagonalisierbar.

falsch: Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann ist $A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und somit eine Diagonalmatrix. Jedoch ist B nicht diagonalisierbar, denn sonst müsste die Diagonalgestalt gleich $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ sein, und dies würde wiederum bedeuten, dass B jeden Vektor auf den 0-Vektor abbildet, was jedoch nicht stimmt.

(c) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann ist $\det(A(A^T)^{-1}) = 1$.

wahr:

$$\det(A(A^T)^{-1}) = \det(A)\det((A^T)^{-1}) = \det(A)(\det(A^T))^{-1} = \det(A)(\det(A))^{-1} = 1.$$