Probeprüfung

Lineare Algebra für die Naturwissenschaften

Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \qquad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(b) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$?

(c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis ist (vgl. **(b)**). Skalieren Sie die Vektoren $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ so, dass die skalierten Vektoren eine ON-Basis bilden, und bestimmen Sie die Koordinaten von

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

bezüglich dieser ON-Basis.

(d) Seien $a = 1$ und $b = 0$. Bestimmen Sie den nicht-orientierten Winkel zwischen $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$.

Aufgabe 2

Betrachten Sie den $\mathbb{R}$-Vektorraum $K_3[x]$ der Polynome mit reellen Koeffizienten vom Grad höchstens 3 sowie die Abbildung

$$T : K_3[x] \to K_3[x], \quad T(p(x)) = p^{'''}(x) - 2\,p^{''}(x) + p^{'}(x).$$

(a) Zeigen Sie, dass T linear ist.

(b) Betrachten Sie die Basis $[b] = [x^3, x^2 + 2x, x, x + 1]$. Bestimmen Sie $T_{[b]\to[b]}$.

(c) Bestimmen Sie die Dimension der Bildmenge von T.

Aufgabe 3

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Finden Sie die Eigenwerte von A sowie deren algebraische Multiplizitäten.

(b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von A besteht? Begründen Sie Ihre Antwort.

(c) Ist A invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie die Inverse.

Aufgabe 4

Betrachten Sie die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie eine Basis, zu der A Diagonalform hat.

Aufgabe 5

Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_1(t) + y_2(t) \\ y_2'(t) &= 3y_1(t) - y_2(t)\,. \end{aligned}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit $y_1(\log(2)) = 1$, $y_2(\log(2)) = 1$.

Aufgabe 6

Entscheiden Sie mit Begründung, ob folgende Aussagen wahr oder falsch sind.

(a) Seien $A \in U(2)$ und λ_1, λ_2 die Eigenwerte von A. Dann gilt $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \pm 1$.

(b) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ mit $A \cdot B = D$, wobei D eine Diagonalmatrix ist. Dann sind A und B diagonalisierbar.

(c) Sei $A \in GL(n, \mathbb{R})$. Dann ist $\det(A(A^T)^{-1}) = 1$.