Repetition Prüfung
Lineare Algebra für die Naturwissenschaften

27 August 2020, 10:00-12:00

- Legen Sie während der Prüfung Ihre Legi vor sich auf das Pult.
- An den Platz mitzunehmen sind nur Schreibutensilien und gegebenenfalls eine kleine Zwischenverpflegung. Deponieren Sie Ihre Taschen, Jacken etc. am Rande des Hörsaales.
- Taschenrechner, Mobiltelephon und Hilfsmittel sind nicht zugelassen.
- Die Prüfung besteht aus 5 Aufgaben und insgesamt 8 Blättern - einem Deckblatt, 5 Aufgabenblättern sowie 2 leere Blätter am Ende. Überprüfen Sie zunächst, ob alle Blätter vorhanden sind. Jedes Blatt ist mit Name und Matrikelnummer zu beschriften. Alle 8 Blätter müssen am Ende der Prüfung in korrekter Reihenfolge abgegeben werden.
- Für jede Aufgabe ist auf den Prüfungsblättern (vorne und hinten) und auf den letzten beiden Seiten separat Platz vorhanden. Sollte zusätzliches Schreibpapier benötigt werden, melden Sie sich bei der Klausurleitung. Verwenden Sie in diesem Fall für jede Aufgabe ein neues Blatt Papier und beschriften Sie dieses mit Namen, Matrikelnummer und Aufgabennummer.
- Nur vollständig begründete und hergeleitete Resultate werden gewertet. Für die Note 6 ist es nicht erforderlich, alle Aufgaben richtig zu lösen.
- Verwenden Sie weder Bleistifte noch rotfarbige Stifte.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 1.

Betrachten Sie die Matrix mit komplexen Koeffizienten

$$A = \begin{pmatrix} i & -i & -1 \\ -i & 1+i & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Berechnen Sie die Determinanten von A und von A^2.

(b) Erklären Sie warum A invertierbar ist, und berechnen Sie dann ihre inverse Matrix A^{-1}.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 2.
Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$ wobei $a, b, c \in \mathbb{R}$ drei Parameter sind:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} a \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ c \end{pmatrix}.$$

(a) Für welche Werte von a, b, und c sind die Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ paarweise orthogonal (das heisst, $v^{(i)}$ und $v^{(j)}$ sind orthogonal für alle $1 \leq i < j \leq 3$)?

(b) Wir nehmen jetzt an, dass $a = b = c = 0$.

1. Überprüfen Sie, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis von $\mathbb{R}^3$ ist.
2. Sei $u \in \mathbb{R}^3$ mit Koordinaten $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ in der Standardbasis. Finden Sie die Koordinaten $\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$ von u in der Basis $[v]$.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 3.

Seien a, b reellen Zahlen.

Wir betrachten die 3×3 Matrix

$$M = \begin{pmatrix} a^2 & ab & a \\ ab & b^2 & b \\ a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) Erklären Sie zuerst ohne Berechnung, warum es eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^3$ gibt, die aus Eigenvektoren von M besteht.

(b) Zeigen Sie, dass

$$u = \begin{pmatrix} a \\ b \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Eigenvektor von M ist und bestimmen Sie seinen Eigenwert.

(c) Sei $v \in \mathbb{R}^3$ ein Vektor mit $v \neq (0, 0, 0)$, der orthogonal zur u ist.

Überprüfen Sie, dass v ein Eigenvektor von M für den Eigenwert 0 ist.

(d) Bestimmen Sie die geometrische Multiplizität des Eigenwertes 0.

Name:

Matrikelnummer:

Aufgabe 4.

Entscheiden Sie welche der folgenden Aussagen wahr sind und welche falsch sind (geben Sie eine kurze Begrüdung).

1. Es gibt eine reguläre (invertierbare) Matrix in $\mathbb{R}^{5\times 5}$ mit Eigenwert 0.
2. Es gibt eine symmetrische Matrix in $\mathbb{R}^{d\times d}$ mit imaginärem Eigenwert i.
3. Die Abbildung $q : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ mit $q(x,y,z) = (x-y)^2 + 2(x+z)^2 + y^2$ ist eine positiv definite quadratische Form auf $\mathbb{R}^3$.
4. Die Matrix
$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$
ist positiv definit.

Name:
Matrikelnummer:

Aufgabe 5.
Betrachten Sie das folgende System von Differentialgleichungen:

$$\begin{cases} y_1'(t) &= y_1(t) + 2y_2(t) \ , \\ y_2'(t) &= y_1(t) - y_2(t) \ . \end{cases}$$

(a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems.

(b) Finden Sie die Lösung mit Anfangswerten $y_1(0) = 1$ und $y_2(0) = 1$.