Differentialgleichungen

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 7:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der DGL $y' = e^{x-2}e^{3y}$.

b) Finden Sie die Lösung mit Anfangsbedingung $y(2) = 0$.

Lösung: a) $y(x) = \frac{1}{3}\ln(3e^{x-2} + C)$ b) $y(x) = \frac{1}{3}\ln(3e^{x-2} - 2)$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 6:

Sei $y(t)$ die Anzahl Individuen einer Population zur Zeit t. Wir modellieren das Wachstum der Population mit Hilfe der DGL $y' = y(t)^2 - 1$ im Bereich $y > 1$.

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der DGL (Tipp: beim Suchen einer Stammfunktion brauchen Sie entweder die Partialbruchzerlegung (falls bekannt) oder sonst benutzen Sie die Tabellen).

b) Geben Sie die Lösung y_1 an, welche die Anfangsbedingung $y_1(0) = 2$ erfüllt.

c) Zu welchem Zeitpunkt t gilt: $y_1(t) = 97$?

Lösung: a) $y(t) = \frac{1+Ke^{2t}}{1-Ke^{2t}}$ b) $y_1(t) = \frac{3+e^{2t}}{3-e^{2t}}$ c) $t = \ln(\frac{12}{7})$

HS19 - Aufgabe 7:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der DGL $y' = \frac{x+5}{y^3}$, wo $x, y > 0$. Wir wollen den ausführlichen Lösungsweg sehen!

b) Finden Sie die spezielle Lösung, die durch $(1, 1)$ geht.

Lösung: a) $y(t) = \sqrt[4]{2x^2 + 20x + C}$ b) $y(t) = \sqrt[4]{2x^2 + 20x - 21}$

HS19 - Aufgabe 6:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 3t^2y + 5t^2$. Wir wollen den ausführlichen Lösungsweg sehen!

b) Finden Sie die spezielle Lösung, die durch $(1, 0)$ geht.

Lösung: a) $y(t) = \left((-5/3)e^{-t^3} + C\right)e^{t^3}$ $(= -5/3 + C \cdot e^{-t^3})$

b) $y(t) = \left((-5/3)e^{-t^3} + \frac{5}{3e}\right)e^{t^3} = (-\frac{5}{3}) + \frac{5}{3e}e^{t^3}$

Rep-HS18 - Aufgabe 7:

a) Lösen Sie die Differentialgleichung $y^2 + (y')^2 = 1$, indem Sie zuerst nach y' auflösen.

b) Überprüfen Sie die Lösung. Welche Werte sind für y möglich?

Lösung:

a) $y = \pm 1, y(t) = \sin(t + C)$

b) $\checkmark (\sin^2(t + C) + \cos^2(t + C) = 1) \quad y \in [-1, 1]$

Rep-HS18 - Aufgabe 6:

In einem Bad hat es 200 Liter Wasser von 30 Grad Celsius Temperatur. Sie lassen jetzt mit konstanter Geschwindigkeit Wasser von 40 Grad einfliessen. Wir wollen eine Differentialgleichung aufstellen, um zu modellieren, wie lange es dauert, bis das Wasser auf 37 Grad angestiegen ist. Setzen Sie voraus, dass es in dieser kurzen Zeitspanne keine Abkühlung durch die Umgebungsluft gibt und das Wasser sich unendlich rasch vermischt. Zudem bleibt die Menge konstant 200 Liter (ein Abfluss ist genau so angelegt).

a) Stellen Sie dazu die Differentialgleichung auf. Führen Sie dazu geeignete Paramter ein.

b) Lösen Sie diese Differentialgleichung.

Lösung:

a) $\dot{y} = (40 - y)\lambda, \quad y(0) = 30, y(t) < 40$ b) $y = 40 - 10e^{-\lambda t}$

HS18 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichung, wobei wir allfällige Variationen der Konstante explizit sehen wollen:

$$y' = \frac{y}{x} + x\cos(x),$$

wo $x, y > 0$, mit Anfangsbedingung $y(\pi/2) = 1$.

Lösung:

$y(x) = \left(\sin(x) + \frac{2}{\pi} - 1\right) x$

Rep-HS17 - Aufgabe 6:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \frac{y^2+4}{2y}(x^3 + 2)$ wo $x, y > 0$.

Machen Sie die Kontrollrechnung.

b) Gebe Sie die spezielle Lösung an, welche durch den Punkt $(1, 10)$ geht.

Lösung:

a) $y = \sqrt{Ke^{x^4/4+2x} - 4}$ b) $y = \sqrt{104e^{-9/4}e^{x^4/4+2x} - 4}$

HS17 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y' = (y + 1)^3 e^{-2x}$, wo $x, y > 0$, mit Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

b) $y' = \frac{y}{x^2} + e^{-\frac{1}{x}}$, wo $x, y > 0$, mit Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Lösung:

a) $y = \sqrt{\frac{1}{e^{-2x} + \frac{1}{4} - e^{-2}}} - 1$ b) $y = (x + e - 1)e^{-\frac{1}{x}}$

Rep-HS16 - Aufgabe 6:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = y^{1/2}x^{3/2}$, wo $x, y > 0$. Machen Sie die Kontrollrechnung.

b) Geben Sie die spezielle Lösung an, welche durch den Punkt $(1,1)$ geht. Vorsicht: beachten Sie, dass $y > 0$ gelten muss. Setzen Sie also die richtige Formel in a) ein ($\sqrt{y} = \ldots$).

Lösung: a) $y = \left(\frac{x^{5/2}}{5} + K\right)^2$, $(K > -\frac{x^5}{5})$ b) $y = \left(\frac{x^{5/2}}{5} + \frac{4}{5}\right)^2$

Rep-HS16 - Aufgabe 3:

Die Funktion $y = \sqrt{x}$ ist Lösung welcher der nachfolgenden DGL, mit Kontrollrechnung bitte?

a) $y' = 2y$ b) $y' = y^2$ c) $y' = \dfrac{2}{y}$ d) $y' = \dfrac{1}{2y}$

Lösung: d) $y' = \dfrac{1}{2y}$

$y' = (\sqrt{x})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2y}$

HS16 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

a) $y' = y^2 \sin(x)$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.

b) $y' = y^2 \ln(|x])$ mit Anfangsbedingung $y(1) = 1$.

Lösung: a) $y = \frac{1}{\cos(x)}$ b) $y = \frac{1}{x - x\ln(x)}$

Rep-HS15 - Aufgabe 7:

Die beiden Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ seien 2 verschiedene Lösungen der Differentialgleichung

$$y' = (\arctan(x) + x^3)y.$$

Genau eine der nachfolgenden Funktionen ist dann sicher auch eine Lösung der Differentialgleichung:

a) $y_1 + y_2 - 2y_1y_2$, b) $y_1 + 2$, c) $3y_1 + 4y_2$ oder d) $y_1 - y_2 + 1$. Welche (mit Begründung)?

Lösung: $3y_1 + 4y_2$ (zeigen durch einsetzen in DGL)

Rep-HS15 - Aufgabe 6:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{y^2}{x^2+1}$.

b) Geben Sie die spezielle Lösung an, für die gilt $y'(1) = \dfrac{8}{\pi^2}$.

Lösung: a) $y = -\frac{1}{\arctan(x)+C}$ wo $x \in \mathbb{R}\backslash\{\tan(-C)\}$ b) $y_1 = -\frac{1}{\arctan(x)}$ oder $y_2 = -\frac{1}{\arctan(x)-\frac{\pi}{2}}$

HS15 - Aufgabe 7:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' = x^8 y + e^{\frac{x^9}{9}}$. Wir wollen die Variation der Konstante und die Kontrolle explizit sehen.

Lösung: $y = (x + C)e^{1/9x^9}$

HS15 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichungen:

1. $y^2 y' = x$ mit Anfangsbedingung $y(0) = 1$.
2. $(1 + x^2)y' + xy = 0$.

Lösung: 1. $y = \sqrt[3]{\frac{3}{2}x^2 + 1}$ 2. $y = \frac{K}{\sqrt{1+x^2}}$ $\left(= Ke^{-\frac{1}{2}\ln(1+x^2)}\right)$ $K \in \mathbb{R}$.

HS15 - Aufgabe 5:

1. Modellieren Sie mit Hilfe einer Differentialgleichung exponentielles Wachstum einer Population, wo ein konstanter Zustrom von aussen dazukommt (Immigration). Welches Modell ist das richtige, wo $c, \alpha > 0$:
   A) $y' = \alpha y + c$, oder
   B) $y' = \alpha y + cy$?
2. Modellieren Sie mit Hilfe einer Differentialgleichung exponentielles Wachstum einer Population, wo der Zustrom von aussen dazukommt (Immigration). Der Zustrom von aussen soll proportional zur Wurzel der aktuellen Totalanzahl Individuen sein.
3. Geben Sie die Lösungen von A) und B) an, sodass die Anfangsbedingung $y(0) = 1$ erfüllt sind. Der Lösungsweg ist nicht notwendig.

Lösung: 1. A) 2. $y' = \alpha y + \beta\sqrt{y}$ 3. A: $y = (1 + \frac{c}{\alpha})e^{\alpha x} - \frac{c}{\alpha}$ B: $y = e^{\alpha+c)x}$

Rep-HS14 - Aufgabe 5:

a) Finden Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = 8xy^2$.

b) Geben Sie die spezielle Lösung an, welche durch den Punkt (0,1) geht.

Lösung: a) $y = (-1)/(4x^2 + C)$; $y = 0$ ist auch Lösung. b) $y = (-1)/(4x^2 - 1)$

HS14 - Aufgabe 7:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' - 4y = 2xe^{5x}$. Wir wollen die Variation der Konstanten explizit sehen.

Lösung: $y(x) = (2(x-1)e^x + C) \cdot e^{4x} = 2(x-1)e^{5x} + Ce^{4x}$

HS14 - Aufgabe 6:

Lösen Sie folgende Differentialgleichung:

1. $y' = (a^2 + x^2)(b^2 + y^2)$ wo a, b beliebige reelle Zahlen.

2. Finden Sie die spezielle Lösung, welche durch den Punkt (1,2) geht.

Lösung: 1. Für $b \neq 0$: $y = \tan\left(b \cdot \left(\frac{x^3}{3} + a^2x + C\right)\right) \cdot b$ und für $b = 0$: $y = -1/(x^3/3 + a^2x + C)$.

2. spez. Lös für $b \neq 0$: $y = \tan\left(b \cdot \left(\frac{x^3}{3} + a^2x + \frac{\arctan(2/b) - b/3 - a^2b}{b}\right)\right) \cdot b$ und für $b = 0$: $y = -1/(x^3/3 + a^2x - 5/6 - a^2)$

Rep-HS13 - Aufgabe 7:

Wir nehmen an, die Wachstumsgeschwindigkeit für die Höhe h sei proportional zur Höhe und umgekehrt proportional zum Quadrat des Alters t.

Stellen Sie die Differentialgleichung für $h(t)$ auf [1 Punkt] und lösen Sie diese dann [2 Punkte].

Lösung: $h' = \frac{h}{t^2}$ $h(t) = ke^{-\frac{1}{t}}$

Rep-HS13 - Aufgabe 6:

Betrachten Sie die Differentialgleichung $y' = -y + 5x$. Wir sagen Ihnen, dass diese Differentialgleichung eine spezielle Lösung hat, welche linear ist. Bestimmen Sie diese und geben Sie die allgemeine Lösung an.

Lösung: $y = 5x - 5$ und $y = Ke^{-x} + 5x - 5$

Rep-HS13 - Aufgabe 5:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung von $y' = (\sin x)e^y$. Schränken Sie die auftretende Konstante so ein, dass die Lösung überall definiert ist.

Lösung: $y = -\ln(\cos(x) + C), \quad C > 1)$

HS13 - Aufgabe 6:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = 2xy + x^3.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an. Wir wollen die einzelnen Rechenschritte explizit sehen - inklusive Variation der Konstanten.

Lösung: $Ce^{x^2} - \frac{1}{2}(x^2 + 1)$

HS13 - Aufgabe 5:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = (2-y)^2 x^2.$$

Geben Sie die allgemeine Lösung an. Geben Sie die spezielle Lösung an mit $x = 0, y = 0$. Hat es noch singuläre Lösungen?

Lösung: $y = 2 - \frac{1}{\frac{x^3}{3}+C}, \quad C \in \mathbb{R} \quad y = 2 - \frac{1}{\frac{x^3}{3}+\frac{1}{2}}$ singuläre Lsg $y = 2$

HS13 - Aufgabe 2:

a) Die beiden Funktionen $y_1 = y_1(x)$ und $y_2 = y_2(x)$ seien beide Lösungen von

$$y' = (\ln(1+\cos^2(x)) - \sin^2(x^2))y.$$

Welche der folgenden Funktionen (mindestens eine) ist dann auch Lösung dieser Differentialgleichung?

$$a)\ y_1^2 + y_2^2, \quad b)\ y_1 y_2, \quad c)\ 2y_1 - 7y_2, \quad d)\ y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2.$$

Lösung: a) Lösung c) (da lineare Kobmination von Lösungen)

Rep-HS12 - Aufgabe 6:

Berechnen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung $y' = \dfrac{y^3}{x^2+1}$.

Lösung: $y = \pm\sqrt{\frac{1}{-2\arctan(x)+C}}$ und $y = 0$ (konst. Lös.)

HS12 - Aufgabe 6:

Lösen Sie die Differentialgleichung $y' + 2y = e^{-x}$.

Lösung: $y = (e^x + C)\, e^{-2x} = Ce^{-2x} + e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$

Differentialgleichungen vom Luchsinger-Vorgänger

Prüfung HS11 - Aufgabe 3:

Gegeben sei die Differentialgleichung

$$y' = \frac{xy^3}{\sqrt{1+x^2}}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der Differentialgleichung und geben Sie den maximalen Definitionsbereich dieser Lösung an.

b) Bestimmen Sie eine spezielle Lösung der Gleichung, die der Anfangsbedingung $y(0) = -1$ genügt.
Geben Sie ausserdem die singulären Lösungen der Differentialgleichung an.

c) Welches Polynom 3. Grades der Form $p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ erfüllt die Differentialgleichung $y'' \cdot x = y' + 9x^2$ mit den Anfangsbedingungen y(0) = 0, y(1) = 5?

Lösung:

a) $y = \pm \frac{1}{\sqrt{-2(\sqrt{1+x^2}+C}}$, definiert für $x \in (-\sqrt{C^2-1}, \sqrt{C^2-1})$ und $C < -1$.

b) Spezielle Lösung: $y = -\frac{1}{\sqrt{3-2\sqrt{1+x^2}}}$, für $x \in (-\frac{\sqrt{5}}{2}, \frac{\sqrt{5}}{2})$.

singuläre Lösung ist $y \equiv 0$. c) $p(x) = 3x^3 + 2x^2$.

Prüfung HS10 - Aufgabe 3:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2+1}{x+2}, \quad x > -2.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die $y(-1) = 1$ gilt.

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $y'(-1) = 1$, und geben Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}(y)$ dieser speziellen Lösung an.

Lösung:

a) Allgemeine Lösung: $y = \tan(\ln(x+2) + C)$

b) spezielle Lösung: $y = \tan(\ln(x+2) + \frac{\pi}{4})$.

c) $y = \tan(\ln(x+2))$, $\mathbb{D}(y) = \{x \in \mathbb{R} | x > -2 \text{ und } x \neq e^{\frac{\pi}{2}+n\pi} - 2 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$.

Prüfung HS09 - Aufgabe 2:

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2-4}{x^2+1}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen $y = c$ (c konstant).

c) Geben sie an, welche der konstanten Lösungen nicht als allgemeine Lösung erscheinen.

Lösung:

a) Allgemeine Lösung: $y = 2\left(\frac{1+K\exp(4\arctan(x))}{1-K\exp(4\arctan(x))}\right)$

b) konstante Lösungen: $y = 2$ oder $y = -2$.

c) Die konstante Lösung $y = -2$ erscheint nicht als allgemeine Lösung (ist eine singuläre Lösung).

Prüfung HS08 - Aufgabe 2:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2+1}{x+1}, \quad x > -1.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung der obigen Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie die spezielle Lösung, für die gilt $y(0) = 1$.

c) Bestimmen Sie die spezielle Lösung mit $y'(0) = 1$, und geben Sie den maximalen Definitionsbereich $\mathbb{D}(y)$ dieser speziellen Lösung an.

Lösung: a) Allgemeine Lösung: $y = \tan(\ln(x+1) + C)$ b) spezielle Lösung: $y = \tan(\ln(x+1) + \frac{\pi}{4})$.
c) spezielle Lösung $y = \tan(\ln(x+1))$, $\mathbb{D}(y) = \{x \in \mathbb{R} | x > -1 \text{ und } x \neq e^{\frac{\pi}{2}+n\pi} - 1 \text{ für alle } n \in \mathbb{Z}\}$.

Prüfung HS07 - Aufgabe 4:

Gegeben ist die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y^2-1}{x^2+1}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

b) Bestimmen Sie alle konstanten Lösungen $y = c$ (c konstant).

c) Geben Sie an, welche der konstanten Lösungen nicht als allgemeine Lösung erscheinen.

Lösung: a) Allgemeine Lösung: $y = \frac{1+Ke^{2\arctan(x)}}{1-Ke^{2\arctan(x)}}$ mit $K \in \mathbb{R}$
b) konstante Lösungen: $y = 1$ oder $y = -1$.
c) Die konstante Lösung $y = -1$ erscheint nicht als allgemeine Lösung.

Prüfung WS06/07 - Aufgabe 1:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = -\frac{y}{1+x^2} + e^{-\arctan(x)}.$$

a) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Differentialgleichung.

b) Sei $a \in \mathbb{R}$. Geben Sie die spezielle Lösung der obigen Differentialgleichung an, für welche gilt $y'(0) = a$.

c) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x}$ für die allgemeine Lösung mit $y = y(x)$ unserer Differentialgleichung.
Hinweis: Wenn Sie die Teilaufgabe a) nicht lösen konnten, so lösen Sie die Teilaufgaben b) und c) mit $y(x) = (2x + 2C)\exp^{\ln(\frac{1}{2})-\arctan(x)}$.

Lösung: a) Allgemeine Lösung: $y = (x+C)e^{-\arctan(x)}$; $C \in \mathbb{R}$
b) spezielle Lösung: $y = (x+1-a)e^{-\arctan(x)}$.
c) $\lim_{x\to\infty} \frac{y(x)}{x} = e^{-\frac{\pi}{2}}$.

Prüfung WS04/05 - Aufgabe 3:

Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' = \frac{y}{x-2} + x - 2; \quad (x > 2).$$

a) Von welchem Typ ist die Gleichung?

b) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieser Gleichung.

c) Sei $a \in \mathbb{R}$ eine beliebige Konstante. Geben Sie die Lösung y an, für welche gilt $y(3) = a$.

Sei $a < 1$. Bestimmen Sie das Minimum der gefundenen Lösung y.

d) Das Wachstumsverhalten einer Population wird beschrieben durch die Differentialgleichung

$$\dot{N}(t) = \lambda(-N(t) + B); \quad (\lambda, B > 0 \text{ konstant}).$$

Um welchen Typ von Wachstum handelt es sich? Skizzieren Sie einen typischen Funktionsverlauf von $N(t)$ unter der Voraussetzung, dass $N(0) < \frac{B}{2}$.

Lösung:

a) inhomogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung.

b) $y = (x + C)(x - 2)$ mit $C \in \mathbb{R}$ und für $x > 2$.

c) $y = (x + a - 3)(x - 2) = x^2 + x(a - 5) - (2a - 6)$, Minimum bei $\left(\frac{5-a}{2}, -\frac{1}{4}(a-1)^2\right)$.

d) beschränktes Wachstum, Skizze siehe Lösung.