Exponentielles Wachstum

HS17 - Aufgabe 7:

a) Ein Team untersucht einen kohlenstoffhaltigen Gegenstand und kommt mit Hilfe der C14-Methode zum Schluss, dass 55% des ursprünglich vorhandenen C14 bereits zerfallen ist.
Auf wann wird der Gegenstand datiert (bitte Formel so weit vereinfachen, wie es ohne Taschenrechner geht - die Halbwertszeit ist Ihnen aus der Vorlesung bekannt!)?

b) Es dauert sicher länger als eine Halbwertszeit, biss 55% der Atome zerfallen sind.
Machen Sie eine Linearisierung, um die Zeit genauer abzuschätzen.
Setzen Sie bei der Halbwertszeit und der damit verbundenen halben Menge an (bitte Formel so weit vereinfachen, wie es ohne Taschenrechner geht).

Lösung:

a) $t = -\frac{\ln(0.45)}{\ln(2)} \cdot 5730$

b) $p(y = 0.45) = 5730 + \left(-\frac{1}{0.5 \cdot (\ln(2)/5730)}\right) \cdot (0.45 - 0.5)$

Rep-HS16 - Aufgabe 8:

Ein Prozess wächst exponentiell (also in stetiger Zeit). Es gelte $y(0) = 2$ und das Wachstum pro Zeiteinheit sei 2 Prozent. Welchen Wert hat $y(t)$ zur Zeit $t = 9.3$? Da Sie keinen Taschenrechner haben, können Sie nicht von Hand berechenbare Ausdrücke stehen lassen.

Lösung:

$y(9.3) = 2 \cdot e^{\ln(1.02) \cdot 9.3} \quad (= 2 \cdot 1.02^{9.3})$

HS16 - Aufgabe 7:

Ein Team untersucht einen kohlenstoffhaltigen Gegenstand und kommt mit Hilfe der C14-Methode zum Schluss, dass 80% des C14 bereits zerfallen sind. Auf wann wird der Gegenstand datiert (bitte Formel so weit vereinfachen, wie es ohne Taschenrechner geht - die Halbwertszeit ist Ihnen von der Vorlesung her bekannt!)?

Lösung:

$t = (-\ln(2)) \cdot \frac{5730}{\ln(2)}$

HS15 - Aufgabe 2:

1. Sie modellieren den Abbau einer Substanz im Körper. Der Ansatz soll sein, dass die Menge kontinuierlich derart abnimmt, dass die Abnahme zu jeder Zeit proportional zur noch vorhandenen Menge ist. Die Abnahmegeschwindigkeit ist derart, dass die Menge alle 2 Stunden halbiert wird. Schreiben Sie dazu die Gleichung der Abnahme auf. Für die Zeitachse nehmen Sie die Einheit Stunden; zu Beginn sei die Menge gleich 1. Geben Sie die Parameter explizit an.

2. Sie wollen wissen, um wieviel die Menge nach 6 Minuten abgenommen hat. Leider haben Sie keinen Taschenrechner dabei. Machen Sie eine Linearisierung (Kapitel 7; $x_0 = 0$), um die Abnahme zu schätzen.

Lösung:

1. $\lambda = \ln(2)/2, \quad y(t) = e^{-\ln(2)/2 \cdot t}$

2. $y(0.1) \approx 1 - \ln(2)/2 \cdot 0.1 = 0.965 \quad$ (mit $\ln(2) = 0.7$; Abnahme $= 0.035$)

HS14 - Aufgabe 2:

1. Eine Population verdoppelt sich in dem von uns beobachteten Zeitintervall jedes Jahr. Modellieren Sie die Entwicklung der Anzahl x in der Zeit mit einem *stetigen* Modell der Form $x(t) = \ldots$.Zur Zeit 0.7 Jahre gibt es 100 Einheiten der Population. Wann gibt es 200 Einheiten der Population?

2. Wann gibt es 300 Einheiten der Population? Da Sie keinen Taschenrechner haben, können Sie den Ausdruck am Schluss als Formel stehen lassen.

Lösung:

1. $x(t) = Ke^{\ln(2)t}$, $K > 0$. Zur Zeit $t = 1.7$ Jahre.
2. Zur Zeit $t = \log_2(3/2^{0.7})$.