

Formelsammlung MAT182

1 Wichtigste Algebra-Grundlagen

1.1 Potenzgesetze

1. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$ $\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $(a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$
3. $a^0 = 1$ $1^n = 1$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

1.2 Logarithmusgesetze

Hinweis: Falls nur $\log(\dots)$ steht, meinen Mathematiker oft $\ln(\dots)$

1. $\log x + \log y = \log(x \cdot y)$ $\log x - \log y = \log\left(\frac{x}{y}\right)$ $n \cdot \log x = \log(x^n)$
2. $e^{\ln x} = x = \ln e^x$ (falls nichts zwischen e und ln ist!! Sonst zuerst Potenz-/Logarithmengesetze anwenden!)
3. $\ln(e) = 1$ $\log_b(1) = 0$
4. $b^{\log_b(x)} = x = \log_b(b^x)$
5. Definition $y = b^x \Leftrightarrow \log_b(y) = x$
6. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (Basiswechselsatz)

Hausaufgaben-Empfehlung vor dem PVK: "Vorarbeit_PVK_Grundlagen-Algebra" (PDF siehe Homepage)

1.3 Gleichungen lösen

1. Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (\text{Mitternachtsformel})$$

2. Kubische Gleichungen (z.B. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$):

1. Nullstelle (durch probieren) erraten
2. Polynomdivision anwenden (siehe Link)

https://youtu.be/K8K4_gowb4E?si=nbw-soxyW4zIED1v

1.4 Trigonometrie

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$
	0	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°
$\sin x$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$
$\cos x$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\tan x$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	*	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$

Beispiel: $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$ * existiert nicht, aber $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$ bzw. $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$$\sin(x) = \sin(x + 2\pi); \quad \cos(x) = \cos(x + 2\pi); \quad \tan(x) = \tan(x + \pi)$$

(z.B. praktisch für negative Werte)

x	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{2}$
	-30°	-45°	-60°	-90°
$\sin x$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan x$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-1	$-\sqrt{3}$	*

* existiert nicht, aber $\lim_{x \rightarrow -\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x \rightarrow \frac{3\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$

1. Bogenmass $\xrightarrow{\cdot \frac{360^\circ}{2\pi}}$ Gradmass, Gradmass $\xrightarrow{\cdot \frac{2\pi}{360^\circ}}$ Bogenmass

2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$

3. $\sin(-x) = -\sin x \quad \cos(-x) = \cos x \quad \tan(-x) = -\tan x$

4. $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$ (Additionstheoreme)

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

2 Differentialrechnung

2.1 Ableitungsregeln

1. Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
2. Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
3. Kettenregel $[u(v(x))]' = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Abl.}}$

2.2 Kurvendiskussion

1. f ist (streng) monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & \text{falls } f'(x) > 0 \\ \text{fallend} & \text{falls } f'(x) < 0 \end{cases}$
2. Nullstellen: $f(x) = 0$
3. Extremalstellen bestimmen
 - kritische Punkte: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist ein $\begin{cases} \text{Minimum} & \text{falls } f''(x_0) > 0 \\ \text{Maximum} & \text{falls } f''(x_0) < 0 \\ \text{Terrassenpunkt} & \text{falls } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$
 - Randpunkte (bei abgeschlossenem Definitionsbereich $D_f = [a, b]$)
 - (ev.) nicht differenzierbare Stellen
4. $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist ein Wendepunkt
5. Globale Extrema? $\Rightarrow y$ -Werte vergleichen!
 - bei abgeschlossenem Definitionsbereich $[a, b]$ gibt es immer ein globales Maximum & glob. Minimum!
 \rightarrow grösster y -Wert ist das globale Maximum, kleinster y -Wert das globale Minimum.
 - bei offenem Definitionsbereich (a, b) gibt es nicht unbedingt ein glob. Max. und/oder globales Min.!
 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ und $\lim_{x \rightarrow b} f(x)$ berechnen.
Falls $\lim_{x \rightarrow a, b} f(x)$ grösster oder kleinster Wert ist \Rightarrow kein globales Max. / Min. vorhanden

2.3 Optimierungsaufgaben (mit Nebenbedingung)

1. **Was** soll maximiert / minimiert werden!? \rightarrow Formel finden $\dots = f(x)$! (oder $= f(x, y)$)
 - (a) Schnelligkeit (einer Ortskurve $\vec{x}(t)$): $f(x) = |\dot{\vec{x}}(t)|$
 - (b) Abstand zwischen $P(x_0|y_0)$ und $y = f(x)$: $f(x) = \sqrt{(x - x_0)^2 + (f(x) - y_0)^2}$
2. Eventuell Nebenbedingung nach x oder y auflösen und oben einsetzen
3. Globales Maximum / Minimum von $f(x)$ bestimmen

3 Integralrechnung

3.1 Vier Methoden um ein Integral zu lösen:

1. direkt / einfaches Integral (eventuell nach Vereinfachung / Algebra-Umformungen!)
2. Integral-Tabelle benutzen (z.B. oft bei $\frac{1}{\dots}$ oder $\sqrt{\dots}$)
3. Substitutionsmethode (\leftarrow Kettenregel)
4. Partielle Integration (\leftarrow Produktregel)

3.2 weitere Integral-Aufgaben

1. Uneigentliche Integrale

2. Rotationsvolumen: $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

3. (geometrische) Fläche berechnen

- zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ mit Schnittpunkten SP1 und SP2:

$$\left| \int_{\text{SP1}}^{\text{SP2}} f(x) - g(x) dx \right|$$

- zwischen $f(x)$ und der x -Achse (mit Nullstellen NS1 und NS2):

$$\left| \int_{\text{NS1}}^{\text{NS2}} f(x) dx \right|$$

4 Weitere wichtige Formeln & Themen

1. Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

(a) für $f^{-1}(x) = g(x)$:
$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

(b) nur für einzelnen Punkt $y_0 = f(x_0)$:
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

2. Linearisierung der Funktion $f(x)$ an der Stelle x_0 :
$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$$

3. Definitionsbereich bestimmen: (MAT182 VL folgende) "potentielle Problemfälle umgehen"

(a)
$$\frac{1}{\underbrace{\text{Nenner}}_{\dots \neq 0}}$$

(b)
$$\sqrt{\underbrace{\dots}_{\geq 0}}$$

(c)
$$\log_b(\underbrace{\dots}_{> 0})$$

(d)
$$\arcsin(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) = \sin^{-1}(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) \quad \text{und} \quad \arccos(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) = \cos^{-1}(\underbrace{\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1})$$

4. Stetigkeit in x_0 prüfen & Differenzierbarkeit in x_0 prüfen

(a)
$$\lim_{x \uparrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0^+} f(x) =: f(x_0) \Rightarrow f(x) \text{ stetig in } x_0$$

(b)
$$\lim_{x \uparrow x_0^-} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0^+} f(x) =: f(x_0) \quad \text{und} \quad \lim_{x \uparrow x_0^-} f'(x) = \lim_{x \downarrow x_0^+} f'(x) =: f'(x_0) \Rightarrow f(x) \text{ differenzierbar in } x_0$$

differenzierbar \Rightarrow stetig

nicht stetig \Rightarrow nicht differenzierbar

5. Exponentielles Wachstum / Zerfall

- mit Halbwertszeit = T:
$$N(t) = K \cdot e^{\pm \lambda t}, \quad K = \text{Wert zur Zeit } 0, \quad \lambda = \frac{\ln(2)}{T},$$

/ Verdoppelungszeit = T \pm : Wachstum / Zerfall

- mit Wachstum (rate) p %:
(= jährliche Zu/Abnahme)
$$N(t) = K \left(1 \pm \frac{p}{100}\right)^t$$

- Umrechnung:
$$\lambda = \ln\left(1 \pm \frac{p}{100}\right) \quad p = \pm 100 \cdot (e^\lambda - 1) = \pm 100 \cdot (\exp(\lambda) - 1)$$

6. Approximation

(a) für die Verdoppelungszeit von Kapital bei jährlichem Zinssatz von p %:
$$T \approx 70/p$$

(b)
$$\ln(2) \approx 0.70$$

DGL Übersicht (für MAT182)

