Kurvendiskussion

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 3:

a) Gegeben seien die beiden Funktionen $f(x) = \frac{9}{x}$ und $g(x) = -\frac{3}{4}x^2 + \frac{39}{4}$. Berechnen Sie die drei Schnittpunkte der beiden Graphen. Tipp: bei der Gleichung dritten Grades einen offensichtlichen x-Wert erraten.

b) Berechnen Sie den Schnittwinkel der beiden Graphen beim Schnittpunkt, der am weitesten rechts liegt. Resultat soweit ohne TR berechenbar.

c) Berechnen Sie die Fläche, welche komplett zwischen den beiden Graphen eingeschlossen ist (Tipp: machen Sie dazu eine Skizze).

Lösung:

a) $P_1(-4, -\frac{9}{4})$, $P_2(1, 9)$, $P_3(3, 3)$

b) via Vektoren $\rightarrow$ $\varphi = \arccos(\frac{11}{\sqrt{2}\sqrt{85}})$

via $\tan(\varphi)$ = Steigung $\rightarrow \varphi = \arctan(-1) - \arctan(-4.5)$

c) $\int_1^3 g(x) - f(x)dx = 13 - 9\ln(3)$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 4:

Führen Sie für $f(x) = 2x^4 - 3x^3$ für $x \in [0, 1]$ eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullsellen, Extrema, Wendepunkte) und machen Sie eine Skizze.

Lösung:

Nulstellen: 0

Maximum bei $x = 0$, Minimum bei $x = 1$

Wendepunkte: bei $x = \frac{3}{4}$ von Rechts- in Linkskurve

Skizze siehe Musterlösung

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 8:

a) Gegeben sei die Bahn des Punktes $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \\ (t-1)^2 \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 2\pi)$. Wo ist die Schnelligkeit maximal, wo minimal?

b) Berechnen Sie beim Punkt $\vec{x}(\pi)$ die Gleichung der Tangente an die Bahn.

c) Berechnen Sie den Durchstosspunkt durch die $x-y$-Ebene der obigen Tangente.

Lösung:

a) minimal bei $t = 1$ mit $f(1) = 1$,

maximal bei $t = 2\pi$ mit $f(2\pi) = \sqrt{16\pi^2 - 16\pi + 5}$

b) $g(t) = (-1, 0, (\pi-1)^2) + t \cdot (0, -1, 2(\pi - 1))$ *(als Vektoren)*

c) $g(\frac{1-\pi}{2}) = (-1, \frac{\pi-1}{2}, 0)$

HS19 - Aufgabe 3:

a) Finden Sie die lokalen und globalen Extrema von $f(x) = x^3 - 2x^2$ für $x \in [0, 5]$.

b) Berechnen Sie $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^3}{2x^4} dx$ einmal mit anfänglichem Kürzen, dann mit der Substitutionsregel, ohne anfängliches Kürzen. Wir wollen die Substitution explizit sehen.

c) Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers, der von $x = 1$ bis $x = 2$ entsteht, wenn man die Funktion $f(x) = x^3$ um die x-Achse rotieren lässt.

Lösung:

a) glob. Maximum bei $x = 5$ (mit 75), lok. Max. bei $x = 0$, glob. Minimum bei $x = \frac{4}{3}$ (mit $-\frac{32}{27}$)

b) $\int_1^2 \frac{1}{2x} dx = \frac{\ln(2)}{2}, \quad u = x^4 \to \frac{1}{8}\ln(16) - 0 = \frac{4 \cdot \ln(2)}{8} = \frac{\ln(2)}{2}$

c) $\int_1^2 \pi \cdot (x^3)^2 dx = \frac{127\pi}{7}$

HS19 - Aufgabe 4:

a) Gegeben sei die Kurve $\xi : \ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ 5t \\ t \end{pmatrix}$, $(0 \leq t \leq 1)$. Wo ist die Schnelligkeit minimal, wo maximal?

b) Gibt es bei der Kurve in a) eine Tangente, welche parallel zur z-Achse ist?

Lösung:

a) minimal bei $t = 0$ (von 26), maximal bei $t = 1$ (von 30)

b) nein, da $\dot{\vec{x}}(t) = (2t \ \ 5 \neq 0 \ \ 1)$

Rep-HS18 - Aufgabe 4:

a) Führen Sie für $f(x) = x^3 - 2x^2$ für $x \in [0, 1]$ eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte) und machen Sie eine Skizze.

Lösung:

a) lok. + glob. Max. bei $(0, 0)$, lok. + glob. Min bei $(1, -1)$
NS bei $x = 0$ und $x = 2$, Wendepunkte bei $x = 2/3$, Skizze siehe Loe

Rep-HS18 - Aufgabe 3:

a) Berechnen Sie die Fläche, die zwischen den Graphen der beiden Funktionen $f(x) = x^5$ und $g(x) = x^3$ im Intervall $[0, 1]$ eingeschlossen ist.

b) Sie sind auf einer Insel gestrandet und haben leider die Quotientenregel vergessen. Sie wissen also nicht mehr, wie man $\frac{f(x)}{g(x)}$ ableitet. Dann haben sie eine Idee: $\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\,(g(x))^{-1}$. Leiten Sie jetzt die Quotientenregel her, wobei Sie die Produkt- und Kettenregel benutzen (die Ableitung der Umkehrfunktion brauchen Sie nicht!).
Wir wollen die einzelnen Schritte sehen!

Lösung: a) 1/12 b) Produkt- und Kettenregel anwenden; als einen Bruch schreiben; mit $g(x)$ erweitern

HS18 - Aufgabe 3:

a) Finden Sie die Extrema von $f(x) = x^4 - 4x^2$ für $x \in [-1, 2]$.

b) Zerlegen Sie 12 in zwei Summanden, sodass deren Produkt maximal wird.

c) Zerlegen Sie 12 in zwei nichtnegative Summanden, sodass die Summe der Quadrate der Summanden maximal wird.

Lösung: a) lok.+glob. Minimum $\sqrt{2}, -4)$, lok. Min. $(-1, -3)$ lok.+glob. Maximum $(0, 0)$, $(2, 0)$
b) 6 und 6 c) 0 und 12

HS18 - Aufgabe 4:

a) Gegeben sei die Kurve $\xi:\ t \mapsto \vec{x}(t) = \begin{pmatrix} t \\ -3t^2 \\ t^2 - 2t \end{pmatrix}$, $(0 \le t \le 1)$. Wo ist die Schnelligkeit minimal, wo maximal?

b) Gibt es bei der Kurve in a) eine Tangente, welche parallel zu $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$?

Lösung: a) minimal bei $t = 0.1$, maximal bei $t = 1$ b) Nein

Rep-HS17 - Aufgabe 4:

Führen Sie für $f(x) = x^4 - 2x - 6$ für $x \in [0, 1]$ eine vollständige Kurvendiskussion durch (Nullstellen, Extrema, Wendepunkte).

Lösung: keine NS, keine Wendepunkte,
glob. Min. bei $(2^{-1/3}, 2^{-4/3} - 2^{2/3} - 6)$, glob. Max bei $(0, -6)$, lok. Max bei $(1, -7)$

Rep-HS17 - Aufgabe 3:

a) Skizzieren Sie möglichst genau den Graphen von $f(x) = x^{-2} + 2$ für $x > 0$.
Dabei sollten die Werte $f(1), f(2)$ klar sichtbar markiert werden (geben Sie dazu auch die Koordinaten an).

b) Geben Sie die Geradengleichung der Tangente an f an der Stelle $x = 1$ an.

c) Berechnen Sie $\int_1^2 f(x)dx$.

Lösung: a) siehe Musterlösung b) $y = -2x + 5$ c) 2.5

HS17 - Aufgabe 3:

a) Leiten Sie die Funktion $\sin^2\left(e^{\sqrt{x}}\right)$ nach x ab, $x > 0$.

b) Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \ln(x^2 + x + 1) - 2$ systematisch auf Extremalstellen $x \in [0, 2]$.
Überlegen Sie sich, ob es Sinn macht, die ganze ursprüngliche Funktion f selber zu untersuchen.

Lösung: a) $\sin\left(e^{\sqrt{x}}\right) \cdot \cos\left(e^{\sqrt{x}}\right) \cdot e^{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x}}$ b) Maximum bei $x = 2$, Minimum bei $x = 0$

Rep-HS16 - Aufgabe 4:

a) Führen Sie für $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3$ eine vollständige Kurvendiskussion durch (Extrema, Wendepunkte).

Lösung: a) WP bei $(1, 1)$, lokales Maximum bei $(0, 3)$ und lok. Min. bei $(2, -1)$

HS16 - Aufgabe 3:

1. Leiten Sie die Funktion $e^{\sin(x^3)}$ nach x ab.

2. Untersuchen Sie die Funktion $f(x) = \ln(e^{(x-1)^2} + 1)$ systematisch auf Extremalstellen für $x \in (0, 2)$. Beachten Sie die Logarithmengesetze und überlegen Sie sich, ob es Sinn macht, die ganze ursprüngliche Funktion f selber zu untersuchen.

Lösung: 1. $e^{\sin(x^3)} \cdot \cos(x^3) \cdot 3x^2$ 2. Minimum bei $x = 1$

Rep-HS15 - Aufgabe 4:

Suchen Sie alle Extremalpunkte von $f(x) = e^{-x^2+x}$ auf dem Intervall $[-1, 2]$ und analysieren Sie, von welcher Form sie sind.

Lösung: lok. + glob. Max: $(\frac{1}{2}, e^{\frac{1}{4}})$, lok. + glob. Min. bei $(-1, e^{-2})$ und $(2, e^{-2})$

HS15 - Aufgabe 3:

1. Bestimmen Sie die Punkte auf der Parabel $y = x^2$, welche den kleinsten Abstand vom Punkt (0, 2) haben.
2. Beschreiben Sie genau, welche Punkte auf dem Paraboloid $f(x, y) = x^2 + y^2$ von (0,0,2) den kleinsten Abstand haben. Tipp: benutzen Sie den ersten Teil.

Lösung: 1. Minimum bei $\left(-\sqrt{\frac{6}{4}}, \frac{6}{4}\right)$ und $\left(\sqrt{\frac{6}{4}}, \frac{6}{4}\right)$ 2. Alle Punkte auf dem Kreis mit Radius $\sqrt{6/4}$ und Mittelpunkt (0,0, 6/4).

Rep-HS14 - Aufgabe 3:

Welche Bedingungen müssen a, b, c erfüllen, damit $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$

a) in keinem Punkt,

b) in einem Punkt,

c) in zwei Punkten waagrechte Tangenten besitzt?

Warum spielt d keine Rolle?

Lösung: a) $4b^2 - 12ac < 0$ b) $4b^2 - 12ac = 0$ c) $4b^2 - 12ac > 0$ d ist nur parallele Verschiebung.

HS14 - Aufgabe 4:

1. Leiten Sie folgende Funktion ab: $f(x) = \sin(x^2/2) \cdot e^{x^2}$
2. Lösen Sie zuerst systematisch mit Hilfe der Differentialrechnung: Wo nimmt die Funktion $g(x) = x^2 + 2x + 1$ das Minimum an? Wie kann man das auch ohne Differentialrechnung lösen?

Lösung: 1. $f'(x) = \cos(x^2/2) \cdot xe^{x^2} + \sin(x^2/2) \cdot 2xe^{x^2} = xe^{x^2}\left(\cos(x^2/2) + 2\sin(x^2/2)\right)$
2. bei $x = -1$; via $f(x) = (x+1)^2 \geq 0 \to$ Min bei $x = -1$ (und $f(-1) = 0$).

Rep-HS13 - Aufgabe 3:

Sei $f(x) = -x^2 + x + 1$ mit Definitionsbereich $(0, 1)$. Maximieren Sie diese Funktion; wird auch ein Minimum angenommen? Welchen Wert hat die Funktion im Maximum?

Lösung: Maximum: $(0.5, 1.25)$, kein Minimum

HS13 - Aufgabe 3:

Maximieren Sie $e^{-(x-3)^2}$ für $x \in [1, 6]$. Begründen Sie Ihr Resultat vollständig, systematisch.

Lösung: globales Maximum $(3, 1)$

RepPr HS12 (Sept13)– Aufgabe 2:

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei zweimal stetig differenzierbar. Ihre Ableitung f' sei genau an den Stellen 1,2,3,4,5 gleich 0. Es gilt $f''(1) > 0$ und $f''(2),\ f''(3),\ f''(4),\ f''(5)$ seien alle von Null verschieden. Bestimmen Sie die Anzahl relativer Minima und Maxima.

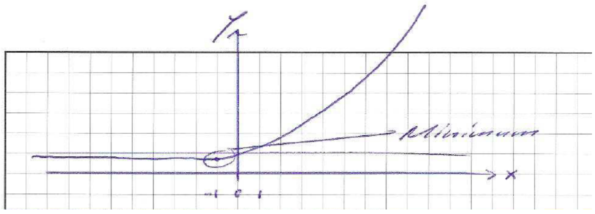
Lösung: 2 relative Maxima, 3 relative Minima

HS12 - Aufgabe 4:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Untersuchen Sie $xe^{x-1} + 1$ auf Extremalstellen und bestimmen Sie deren Typ. Skizzieren Sie den Graphen möglichst genau.

Lösung: Minimum bei $x = -1$ $\quad \lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$, $\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 1$.

Skizze:



RepPrüfung HS12 (Sept13) - Aufgabe 4:

Untersuchen Sie im Intervall $[-5,+5]$ die Funktion $f(x) = x^3 + 2x^2 + x$ auf Extremalstellen und bestimmen Sie deren Typ.

Lösung: relatives Minima bei $x = -\frac{1}{3}$, relatives Maxima bei $x = -1$, relatives und absolutes Minima bei $x = -5$, relatives und absolutes Maxima bei $x = 5$

ProbePrüfung HS12 - Aufgabe 4 a):

a) Sei $f : [-5, 5] \to \mathbb{R}$ derart, dass $f(x) = x^3 + 2x^2 - 3$. Finden Sie alle (globalen und lokalen) Extremalstellen und geben Sie an, von welchem Typ sie sind.

Lösung: lokales Minimum bei $x = 0$, lokales Maximum bei $x = -\frac{4}{3}$,
globales Minimum bei $x = -5$ (mit $f(-5) = -78$) und globales Maximum bei $x = 5$ (mit $f(5) = 172$).