# Vektorgeometrie-Aufgaben

**Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 2:**

a) Gegeben seien die drei Punkte $A(4,-5,106), B(-4,-13,92)$ und $C(-6,3,84)$. Zeigen Sie, dass es sich dabei um 3 Ecken eines Quadrats handeln könnte. Tipp: Dazu müssen Sie *zwei* Eigeschaften überprüfen.
b) Berechnen Sie noch den vierten Punkt $D$.

c) Wir wollen das Quadrat $ABCD$ noch zu einem Würfel ergänzen. Berechnen Sie den Punkt $E$, der eine Kantenlänge von $A$ entfernt ist (es gibt 2 Lösungen - wir wollen beide sehen). Die weiteren Punkte müssen nicht berechnet werden.

**Lösung:**

a) $|\vec{a}| = |\vec{b}| = 18$ **und** $\vec{a} \bullet \vec{b} = 0$
b) $D(2,11,98)$ *(Punkt-Bezeichnung fix!)*
*im Gegenuhrzeigersinn:* $A \to B \to C \to D$
c) $A \pm (16,-2,-8) \to E_1(20,-7,98),\ E_2(-12,-3,114)$

**HS19 - Aufgabe 2:**

a) Wie lautet die Gleichung der Ebene $E$, die durch $A(0,0,0), B(1,2,3), C(4,5,6)$ geht (nicht die Parameterdarstellung!)?
b) Wie gross ist die Fläche des Dreiecks ABC?

c) Wie lautet die Schnittgerade der Ebene $E$ mit der $xy$-Ebene in Parameterdarstellung?

**Lösung:**

a) $-3x+6y-3z=0$ b) $\sqrt{54}/2$
c) $(0,0,0)+s\cdot(-2,-1,0), s \in \mathbb{R}$

**Rep-HS18 - Aufgabe 2:**

Der Vektor $\vec{a}$ habe Richtung $\vec{r}=(0,1,2)$. Zusammen mit dem Vektor $\vec{b}=(1,2,3)$ und dem Ursprung $O$ definiert er ein Dreieck $OAB$ : $A$ sei im Endpunkt von $\vec{a}$, wenn dieser in $O$ ansetzt; analog $B$. Wie lange muss $\vec{a}$ sein, damit das Dreieck die Fläche 1 hat? Man kann mangels Taschenrechner die Formel stehen lassen.

**Lösung:** $|\ \vec{a}\ | = \sqrt{\frac{10}{3}}$

**HS18 - Aufgabe 1b)**

Gegeben seien zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$, beide nicht der Nullvektor und senkrecht zueinander. Kann es sein, dass das Kreuzprodukt $\vec{a} \times \vec{b}$ gleich $\vec{0}$ ist? Wenn ja, Beispiel; wenn nein: Grund.

**Lösung:** Nein, denn die Länge des Kreuzprodukts ist $|\vec{a}]|\vec{b}| \neq 0$

**HS18 - Aufgabe 2:**

Von einem Dreieck $ABC$ sei gegeben $A(0,0), B(1,0)$ und $C(x,1)$. Bestimmen Sie mit Beweis $x$ so, dass die Summe der quadrierten Seitenlängen minimal wird.

**Lösung:** $x = 0.5$

**Rep-HS17 - Aufgabe 2:**

a) Gegeben seien 3 Vektoren $\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$. Wenn $\vec{a}$ senkrecht auf $\vec{b}$ steht und $\vec{b}$ senkrecht auf $\vec{c}$, folgt daraus, dass auch $\vec{a}$ senkrecht auf $\vec{c}$ steht? Falls ja: Beweis; Falls nein: Gegenbeispiel.

b) Von einen Quadrat $ABCD$ kennt man die beiden ersten Punkte vollständig: $A(5,4,-3), B(-2,8,1)$; vom dritten Punkt unvollständig $C(2,?,0)$. Berechnen Sie $C$ und $D$ vollständig. Gibt es nur eine Lösung?

**Lösung:** a) Nein! (wähle z.B. $\vec{c} = k \cdot \vec{a}$ b) Ja, $C(2,16,0), D(9,12,-4)$

**HS17 - Aufgabe 2:**

a) Gegeben seien neben Ursprung $O(0,0,0)$ auch die Punkte $A(1,1,1)$ und $B(0,2,0)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$. Ausdrücke in trigonometrischen Funktionen oder deren Umkehrfunktionen kann man stehen lassen.

b) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks $OAB$.

**Lösung:** a) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{3})$ b) $\sqrt{8}/2 = \sqrt{2}$

**HS16 - Aufgabe 2:**

a) Geben Sie alle Punkte $P$ in der $xy$-Ebene auf der Geraden $x = 0.5$ an, von denen aus die beiden Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,0,0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte).

b) Geben Sie alle Punkte $P$ in der $xy$-Ebene an, von denen aus die beiden Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,0,0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht - **hilft aber am Schluss bei der Umformung**; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte). Prüfen Sie am Schluss bitte, ob wirklich alle Punkte aus der Rechnung in Frage kommen und beschreiben Sie die Menge der Punkte.

c) Geben Sie alle Punkte $P$ im Raum an, von denen aus die beiden Punkte $A(0,0,0)$ und $B(1,0,0)$ unter einem Winkel von 90 Grad gesehen werden (geometrische Anschauung reicht nicht; mit Rechnung mit Skalarprodukt bitte). Prüfen Sie am Schluss bitte, ob wirklich alle Punkte aus der Rechnung in Frage kommen und beschreiben Sie die Menge der Punkte.

**Lösung:** a) $(1/2, 1/2, 0)$ und $(1/2, -1/2, 0)$ b) Kreis mit $r = 0.5$ und $M = (0.5, 0)$ c) Kugel mit $r = 0.5$ und $M = (0.5, 0, 0)$

**Rep-HS15 - Aufgabe 1h) :**

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien definiert als $\vec{e}_1 := (5,0,0)$ und $\vec{e}_2 := (0,2,3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

**Lösung:** $(0 \ \ -45 \ \ 30)$

**Rep-HS15 (Sept. 2016) - Aufgabe 1h)**

Die Vektoren $\vec{e_1}, \vec{e_2}$ seien definiert als $\vec{e_1} := (5,0,0)$ und $\vec{e_2} := (0,2,3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e_1}$ und $\vec{e_2}$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

**Lösung:** $(0, -45, 30)^t$

**Rep-HS15 - Aufgabe 2 :**

a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten (0,0,1), (0,1,0), (0,0,3).

b) Geben Sie die Cosinus' der drei Winkel des Dreiecks an (kürzen soweit möglich).

**Lösung:** a) 1 b) in (0,0,1): $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

in (0,1,0): $\cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ in (0,0,3): $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

**HS15 - Aufgabe 1b)**

Sie haben 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, in welchen Fällen das Skalarprodukt 0 ist.

**Lösung:** wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ Nullvektoren sind; Oder $\vec{a} \perp \vec{b}$ (senkrecht)

**HS15 - Aufgabe 1c)**

Folgt aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ dass auch $\vec{b} = \vec{c}$? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein einfaches Gegeneispiel an.

**Lösung:** Nein. Nicht wenn $\vec{a} = 0 \ \rightarrow \vec{b}, \vec{c}$ beliebig

**HS15 - Aufgabe 1d)**

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien definiert als $\vec{e}_1 := (1,0,0)$ und $\vec{e}_2 := (0,2,0)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 2 streckt?

**Lösung:** $(0, 0, 4)$

**Rep-HS14 - Aufgabe 1a)**

Für welche zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ gelte: $\vec{a} \cdot \vec{b} = 2\sqrt{2}$, $|\vec{a}||\vec{b}| = 4$. Geben Sie den kleineren Zwischenwinkel an. Geben Sie auch ein konkretes Beispiel von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ mit Koordinaten an.

**Lösung:** $\frac{\pi}{4}$ oder $45°$ Bsp.: $\vec{a} = (2, \ 0), \vec{b} = (\sqrt{2}, \ \sqrt{2})$

**Rep-HS14 - Aufgabe 2:**

Da Sie ohne Taschenrechner arbeiten, können Sie einzelne Ausdrücke in dieser Aufgabe auch unausgerechnet stehen lassen. Gegeben sei der Punkt $A(1,3,4)$.

a) Welche beiden Punkte $B, C$ auf der $x$-Achse haben genau Abstand $\sqrt{50}$ von $A$?

b) Geben Sie einen Normalenvektor zur Ebene durch die Punkte $A, B, C$ an.

c) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks mit Ecken $A, B, C$.

**Lösung:** a) $B = (-4,0,0), C = (6,0,0)$ b) $\vec{n} = (0,-40,30)^T$ c) 25

**HS14 - Aufgabe 1.1) - 1.3)**

1) Sei $g$ eine Gerade, welche durch die beiden Punkte $A(1,2,3)$ und $B(4,5,6)$ geht. In welchem Punkt $C$ durchsticht diese Gerade die $x$-$y$-Ebene?

2) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $A(0,0,0), B(1,1,1), C(5,0,2)$.

3) Ist das Vektorprodukt kommutativ? Wenn ja, beweisen Sie es; wenn nein, rechnen Sie ein einfaches Gegenbeispiel dazu.

**Lösung:** 1) $C = (-2,-1,0)$ 2) $\frac{\sqrt{38}}{2}$ 3) $\vec{a} \times \vec{b} \neq \vec{b} \times \vec{a}$

z.B. $\vec{a} = (1\ \ 0\ \ 0)$ und $\vec{b} = (0\ \ 1\ \ 0) \rightarrow (0\ \ 0\ \ 1) \neq (0\ \ 0\ \ -1)$

**Rep-HS13 - Aufgabe 2 :** Wir legen durch die drei Punkte $(1,0,0), (0,1,0)$ und $(0,0,1)$ eine Ebene.

a) Machen Sie dazu eine Skizze und geben Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an (Herleitung wegen schöner Zahlen und Skizze nicht nötig).

b) Geben Sie noch einen zweiten, anderen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an.

c) Wie sieht die Ebenengleichung aus?

d) Welche Winkel hat die Ebene zur $x$-$y$-Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lasssen]

**Lösung:** a) $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ b) $\vec{n}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}, -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$

c) $x + y + z - 1 = 0$ d) $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

**ProbePrüfung HS12 - Aufgabe 2:**

Geben Sie alle Punkte auf der $y$-Achse an, von denen man die beiden Punkte A(2; 3; 1) und B(4;-4; 2) unter einem rechten Winkel sieht.

**Lösung:** $(0,-2,0)$ und $(0,1,0)$

**HS12 - Aufgabe 2:**

Wie lautet die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte A(0,0,1), B(0,1,0) und C(1,0,0) geht?

**Lösung:** $x + y + z - 1 = 0$