MathCourses

www.mathcourses.ch/mat182.html

MAT182 PVK

Playlist Zusatz-Videos

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat182.html

MAT182 PVK

Playlist Zusatz-Video

Uneigentliche Integrale

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Uneigentliche Integrale

= Bestimmte Integrale mit "Symobol" ($+\infty$, $-\infty$)

oder "Definitionslücke" als Grenze

$\Rightarrow$ muss man formell korrekt als Limes aufschreiben

Bsp. Übungsaufgabe 7. $\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$

Zwischenkurs 2

$$\int_{-\infty}^{0} e^x \, dx$$

$$= \lim_{t \to -\infty} \int_{t}^{0} e^x \, dx$$

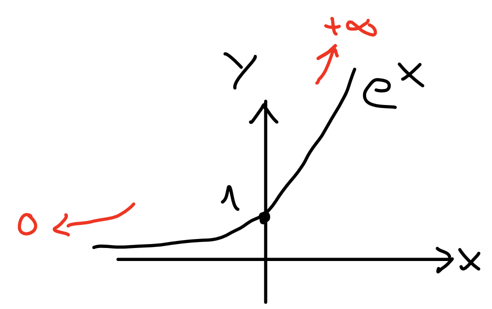
$$= \lim_{t \to -\infty} e^x \Big|_t^0$$

$$= e^0 - \lim_{t \to -\infty} e^t$$

"$e^{-\infty} = 0$"

$$= 1 - 0 = \underline{\underline{1}}$$

Exponentialfunktion:



$\rightarrow$ $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$

$\lim_{x \to \infty} e^x = \infty$

oder "existiert nicht"

(beides korrekt)

Bsp 2: $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$ $\quad\quad$ $\mathbb{D}_x = (0, \infty)$

darf nicht durch 0 dividieren

$$\Rightarrow \lim_{t\to 0^+} \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0} \int_t^1 \frac{1}{x^{1/2}}\,dx = \lim_{t\to 0} \int_t^1 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$$

$$= \lim_{t\to 0} x^{+\frac{1}{2}} \cdot \left(\frac{1}{1/2}\right)\Big|_t^1 = \lim_{t\to 0} 2\cdot\sqrt{x}\,\Big|_t^1$$

$$= 2\cdot\sqrt{1} - \lim_{t\to 0} 2\cdot\sqrt{t}$$

$$= 2 - 2\cdot\sqrt{0}$$

$$= 2 - 0 = \underline{\underline{2}}$$

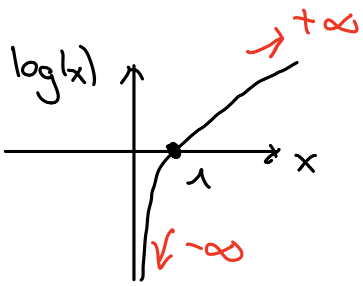
Zusatz Grenzwerte: "stärkerer Term gewinnt"

$$e^x > x^n > \sqrt{x} > \ln(x)$$

Bsp.: $\lim\limits_{x \to \infty} \underbrace{e^{-x}}_{\to 0} \cdot \underbrace{x^{100}}_{\to \infty} = 0$

e^x ist stärker / schneller

Zusat: Logaritmus-Funktion:



$$\lim_{x \to \infty} \log(x) = \infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log(x) = -\infty$$

oder "existiert nicht"

(anstatt $\pm\infty$, beides korrekt)

MAT182 PVK

Playlist Zusatz-Video

Rotationsvolumen

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Vorzeigeaufgabe: Rotationsvolumen für $f(x) = e^{-x}$ von $x \in [0, 1]$.

Rotationsvolumen: $\pi \cdot \int_a^b (f(x))^2 \, dx$

$$\Rightarrow \pi \cdot \int_0^1 (e^{-x})^2 \, dx = \pi \cdot \int_0^1 e^{-2x} \, dx = \pi \cdot \frac{(-1)}{2} e^{-2x} \Big|_0^1$$

$$= \pi \cdot \frac{-e^{-2}}{2} - \left(\pi \cdot \underbrace{\frac{-e^0}{2}}_{= -\frac{1}{2}} \right)$$

$$= -\frac{\pi e^{-2}}{2} + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi e^{-2}}{2} = \underline{\underline{\frac{\pi}{2} \cdot (1 - e^{-2})}}$$

MAT182 PVK

Playlist Zusatz-Video

Ein-Minuten-Aufgaben

Kurvendiskussion

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

1-Min-Aufgaben

- Luchsingers "Belohnung" für fleissige StudentInnen

  aber alles möglich / unberechenbar

- Einfache Punkte muss man holen!

- Je mehr man übt / anschaut, desto besser

  z.T. ähnliche Fragen (zum selben Thema)

  → Algebra-Vereinfachungen

  (siehe Vorarbeits-PDF Algebra)

- Gewisse Aufgaben kurz im PVK thematisieren

  Grossteil ist aber Eigenarbeit

  → unterstütze Fleiss :)

  → Meldet mir mühsame Aufgaben (via WhatsApp + Screenshot)

Kurvendiskussion:

HS13 - Aufgabe 1g)

Zeigen Sie: wenn $f(x)$ und $[f(x)]^2$ beide bei x_0 einen Wendepunkt haben, dann ist $f'(x_0) = 0$.

Lösung: $(f(x)^2)' = 2 \cdot f(x) \cdot f'(x) \Rightarrow$ $([f(x_0)]^2)'' = \ldots = 2\underbrace{f''(x_0)}_{=0} f(x_0) + 2f'(x_0)^2 = 0 \;\Rightarrow\; f'(x_0) = 0$

Da Wendepunkt

$\boxed{\begin{array}{l}\text{(ev) Wendepunkt bei } x_0: \\ \quad f''(x_0) = 0 \Rightarrow \text{Kandidat} \\ \text{prüfen mit } f'''(x_0) \neq 0\ ?\end{array}}$

ungerade Ableitung

HS14 - Aufgabe 1g)

Seppli untersucht die Funktion x^3. Er leitet Sie ab und setzt die Ableitung gleich 0. Die Lösung der Gleichung ist dann 0. Er schliesst, dass x^3 bei $x = 0$ eine Extremalstelle hat. Kommentieren Sie sein Vorgehen.

$f(x) = x^3 \quad f'(x) = 3x^2 \quad f''(x) = 6x$

Lösung: $f' = 0$ ist notwendige, aber nicht hinreichende Bedingung für Extrema.

$f'(x) = 3x^2 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$ (bloss Kandidat für) Extrema?

(Graph zeichnen $\to$ $x = 0$ ist Sattelpunkt)

⇒ prüfen mit

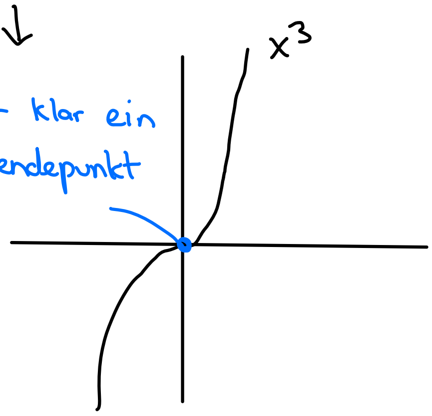
$f''(x=0) = 0 \longrightarrow$ (bloss Kandidat für) Wendepunkt?

⇒ prüfen mit

$f'''(x=0) = 6 \neq 0 \Rightarrow$ Wendepunkt

(da $f'(0) = 0 \Rightarrow$ Sattelpunkt)

aber klar ein Wendepunkt



HS14 - Aufgabe 1h)

Trudi untersucht die Funktion x^4. Sie leitet Sie ab und setzt die Ableitung gleich 0. Die Lösung der Gleichung ist dann 0. Dann leitet sie nochmals ab und stellt leider fest, dass die Ableitung in 0 selber 0 ist. Trudi schliesst, dass x^4 bei 0 keine Extremalstelle hat. Kommentieren Sie ihr Vorgehen.

$f(x) = x^4 \quad f'(x) = 4x^3 \quad f''(x) = 12x^2 \quad f'''(x) = 24x$

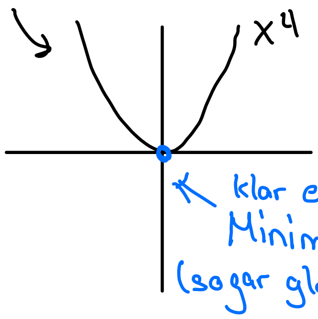
Lösung: $f'' \neq 0$ ist hinreichende aber nicht notwendige Bedingung.

$f'(x) = 4x^3 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = 0$ (bloss Kandidat für) Extrema?

(Graph zeichnen $\to$ $x = 0$ ist Minimum)

⇒ prüfen mit

$f''(x=0) = 0 \longrightarrow$ (bloss Kandidat für) Wendepunkt?



klar ein Minimum (sogar globales)

⇒ prüfen mit

$f'''(x=0) = 0 \Rightarrow$? ⇒ weiter prüfen!

$f^{IV}(x=0) = 24 \neq 0 \Rightarrow$ da bei 4. (gerader) Ableitung erstmals $\neq 0$ ⇒ kein Wendepunkt

MAT182 PVK

Playlist Zusatz-Video

Abstand optimieren

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Vorzeigeaufgabe: Prüfung HS11 - Aufgabe 4c)

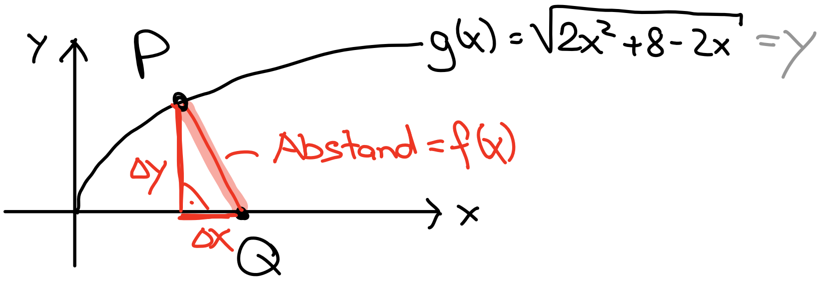
Wir definieren die Funktion $g(x) = \sqrt{2x^2+8} - 2x$, $D(g) = \mathbb{R}$. Welcher Punkt P auf dem Graphen von g hat minimalen Abstand zu dem Punkt $Q(1,0)$?

① Funktionsgleichung $f(x) = \ldots$ bestimmen

Was soll minimiert werden? $\Rightarrow f(x) =$ Abstand

$$\boxed{\text{Abstand} \Rightarrow \text{Pythagoras: } a^2 + b^2 = c^2 \text{ resp. } (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (f(x))^2}$$

Skizze:



$$\boxed{\begin{aligned} P &= (x, y) \\ Q &= (1, 0) \\ \Delta x &= (1 - x) \\ \Delta y &= (0 - y) \end{aligned}}$$

P liegt auf $y = g(x) \Rightarrow y = \sqrt{2x^2+8-2x}$

$\Rightarrow \Delta y = (0 - \sqrt{2x^2+8-2x})$, $\Delta x = (1-x)$

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 = (\underbrace{f(x)}) ^2 \;\hat{=}\; \text{Abstand}$$

$$(1-x)^2 + (-\sqrt{2x^2+8-2x})^2 = (f(x))^2$$

$$\Rightarrow \text{Abstand} \;\hat{=}\; f(x) = \sqrt{(1-x)^2 + (-\sqrt{2x^2-2x+8})^2}$$

$$= \sqrt{1 - 2x + x^2 + 2x^2 - 2x + 8}$$

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 9} \;\hat{=}\; \text{Abstand}$$

② Globales Extrema von f(x) bestimmen

$$f(x) = \sqrt{3x^2 - 4x + 9}$$

Da $\sqrt{\ }$ streng monoton (wachsend) ist, reicht es für die Bestimmung der Extremalstellen bloss

$h(x) = 3x^2 - 4x + 9$ zu betrachten

① krit. Stellen:

$$h'(x) = 6x - 4 \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x = \frac{2}{3}$$

Art. des Extremas:

$$h''(x) = 6 \Rightarrow h''\left(\tfrac{2}{3}\right) = 6 > 0 \Rightarrow \text{Minimum bei } x = \frac{2}{3}$$

② Randpunkte

keine da $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

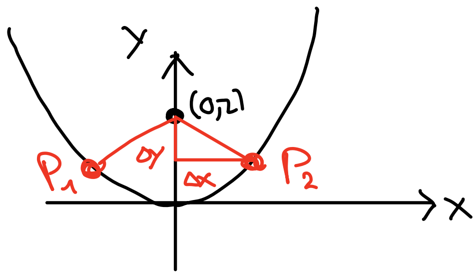
③ überall diff'bar (z.B. keine Betragsfunktion)

③ Globales Min $\hat{=}$ kleinster y-Wert ($\hat{=}$ Minimaler Abstand)

- $y = f\left(\tfrac{2}{3}\right) = \sqrt{3\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right)^2 - 4\cdot\left(\tfrac{2}{3}\right) + 9} = \sqrt{\tfrac{4}{3} - \tfrac{8}{3} + \tfrac{27}{3}} = \sqrt{\tfrac{23}{3}}$
- $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to\pm\infty} \sqrt{3x^2 - 4x + 9} = \infty \Rightarrow$ glob. Min bei $\underline{\underline{x = \frac{2}{3}}}$

HS15 - Aufgabe 3a) Welche Punkte auf der Parabel $y = x^2$ haben den kleinsten Abstand vom Punkt $(0, 2)$?

Skizze:



① Funktionsgleichung $f(x) = \dots$ bestimmen

Abstand minimieren $\Rightarrow f(x) = \text{Abstand} = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2}$

- Punkt auf $f(x) \Rightarrow P(x, y=f(x)) = P(x, x^2)$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} \Delta x &= (x-0) \\ \Delta y &= (2-x^2) \end{aligned}\right\} f(x) = \sqrt{x^2 + (2-x^2)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + 4 - 4x^2 + x^4}$$

$$\Rightarrow f(x) = \sqrt{x^4 - 3x^2 + 4}$$

② Globale Extrema von $f(t)$ bestimmen

- kritische Stellen

Bem.: Da $\sqrt{\dots}$ streng monoton wachsend ist, reicht es

$g(x) = x^4 - 3x^2 + 4$ zu betrachten (für die Extremalstellen)

$$g'(x) = 4x^3 - 6x \overset{!}{=} 0 \Rightarrow x(4x^2 - 6) \overset{!}{=} 0$$

$x_1 = 0$

$4x^2 = 6$

$x^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2} \quad |\pm\sqrt{}$

$x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$ $\qquad$ $x_3 = +\sqrt{\frac{3}{2}}$

• Art bestimmen: $g''(x) = 12x^2 - 6$

$\Rightarrow g''(0) = -6 < 0 \Rightarrow$ Maximum bei $x_1 = 0$

$g''(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = 12 \cdot \frac{3}{2} - 6 = 12 > 0 \Rightarrow$ Minimum bei $x_2 = -\sqrt{\frac{3}{2}}$

$g''(\sqrt{\frac{3}{2}}) = 12 \Rightarrow$ Minimum bei $x_3 = \sqrt{\frac{3}{2}}$

• Randpunkte: keine da $\mathbb{D} = \mathbb{R}$

(oder ev. 0 durch Symmetrie: $\mathbb{D} = [0, \infty)$)

• globale Extrema (= gr. + kl. y-Wert)

$y_1 = f(0) = \sqrt{4} = 2$

$y_2 = f(-\sqrt{\frac{3}{2}}) = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} = \sqrt{\frac{9-18+16}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}}$

$y_3 = f(\sqrt{\frac{3}{2}}) = \sqrt{\frac{9}{4} - \frac{9}{2} + 4} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \sqrt{\frac{7}{4}} = \frac{\sqrt{7}}{2}$

da $\sqrt{\frac{7}{4}} < \sqrt{\frac{16}{4}} = \sqrt{4}$

$\Rightarrow$ globales Maximum bei $x = 0$ mit Abstand 2

globales Minimum bei $x = \pm\sqrt{\frac{3}{2}}$ mit Abstand $\sqrt{\frac{7}{4}}$

$\Rightarrow$ Punkte $P_1(-\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2})$ und $P_2(\sqrt{\frac{3}{2}}, \frac{3}{2})$

x^2

MAT182 PVK

Playlist Zusatz-Video

Extrema einer Betragsfunktion

(nicht differenzierbare Stellen)

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Extrema von einer Betrags-Funktion : (Beispiel für nicht diff'bare Stellen)

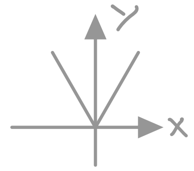
$f(x) = |h(x)|$

① alles normal machen für $h(x)$

② Nullstellen berechnen (lok. und glob. Minima)

③ graphisch von Hand $|h(x)|$ skizzieren

"Skizze" für $|x|$



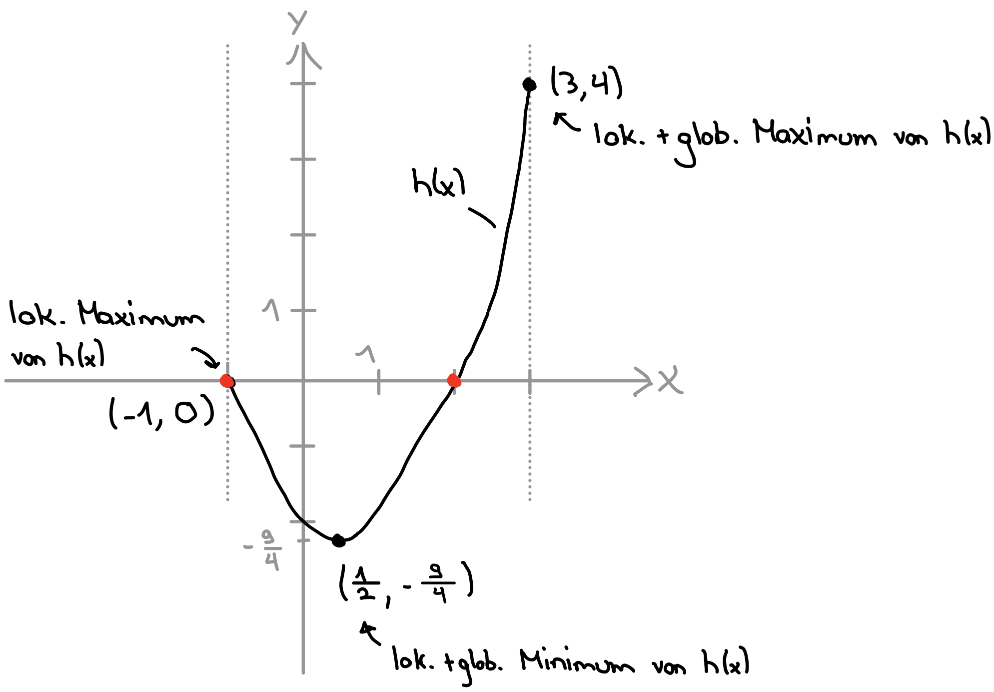
Bsp.: $f(x) = |\underbrace{x^2 - x - 2}_{h(x)}|$, $x \in [-1, 3]$

① alles normal machen für $h(x)$

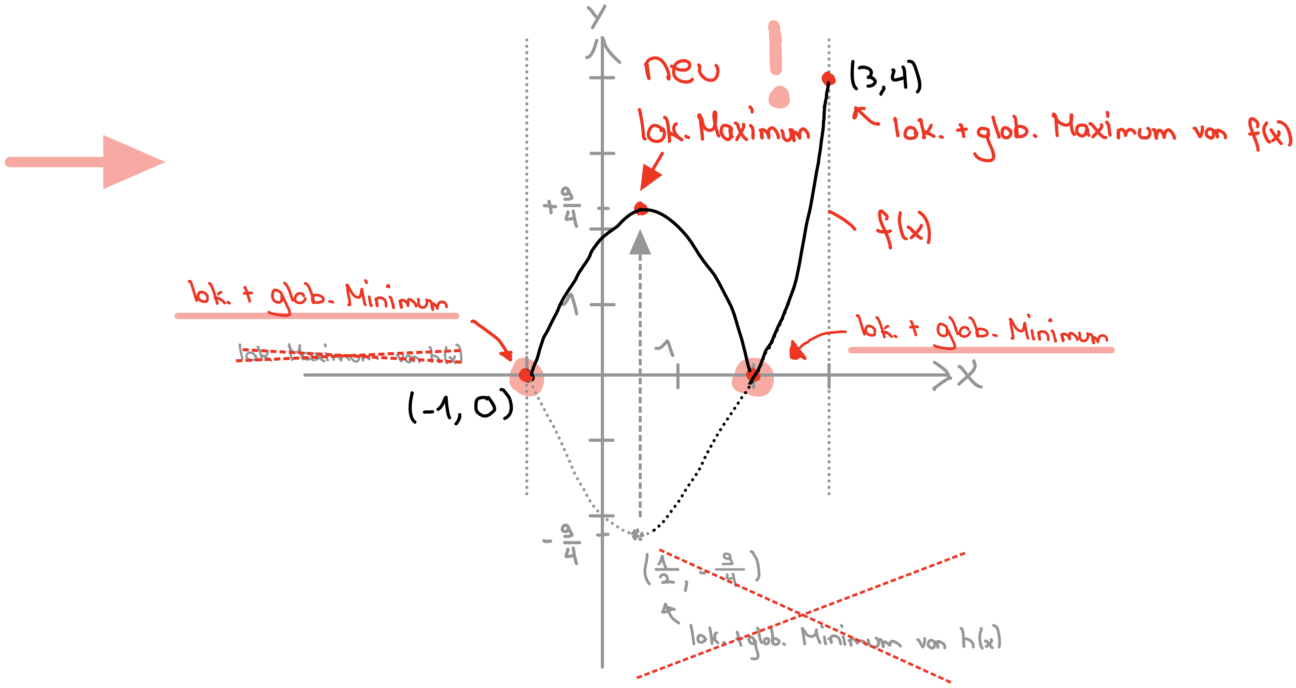
krit. Stellen: $x = 0.5$ (Minima)

Randpunkte bei $x = -1$, $x = 3$

② Nullstellen bei $x = -1$ und $x = 2$



③ graphisch von Hand $f(x) = |h(x)|$ skizzieren



Bem.: Nullstellen sind lok. + glob. Minima

(nicht diff'bare Stelle falls Knick)