MAT182 PVK

Vorarbeit "Grundlagen"

Ableiten

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

2 Differentialrechnung

2.1 Ableitungsregeln

1. Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
2. Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
3. Kettenregel $[u(v(x))]' = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Abl.}}$

2.2 Kurvendiskussion

1. f ist (streng) monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & \text{falls } f'(x) > 0 \\ \text{fallend} & \text{falls } f'(x) < 0 \end{cases}$
2. Nullstellen: $f(x) = 0$
3. Extremalstellen bestimmen
   - kritische Punkte: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist ein $\begin{cases} \text{Minimum} & \text{falls } f''(x_0) > 0 \\ \text{Maximum} & \text{falls } f''(x_0) < 0 \\ \text{Terrassenpunkt} & \text{falls } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$
   - Randpunkte $\big($bei abgeschlossenem Definitionsbereich $D_f = [a, b]$ $\big)$
   - (ev.) nicht differenzierbare Stellen
4. $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist ein Wendepunkt
5. Globale Extrema? $\Rightarrow$ y-Werte vergleichen!
   - bei abgeschlossenem Definitionsbereich $[a, b]$ gibt es immer ein globales Maximum & glob. Minimum!
     $\rightarrow$ grösster y-Wert ist das globale Maximum, kleinster y-Wert das globale Minimum.
   - bei offenem Definitionsbereich (a, b) gibt es nicht unbedingt ein glob. Max. und/oder globales Min.!
     $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b} f(x)$ berechnen.
     Falls $\lim_{x\to a,b} f(x)$ grösster oder kleinster Wert ist $\Rightarrow$ kein globales Max. / Min. vorhanden

2.3 Optimierungsaufgaben (*mit Nebenbedingung*)

1. **Was** soll maximiert / minimiert werden!? $\longrightarrow$ Formel finden $\ldots = f(x)$! $\big($*oder* $= f(x, y)$ $\big)$
   (a) Schnelligkeit (einer Ortskurve $\vec{x}(t)$): $f(x) = |\dot{\vec{x}}(t)|$
   (b) Abstand zwischen $P(x_0|y_0)$ und $y = f(x)$: $f(x) = \sqrt{\big(x - x_0\big)^2 + \big(f(x) - y_0\big)^2}$
2. *Eventuell Nebenbedingung nach x oder y auflösen und oben einsetzen*
3. Globales Maximum / Minimum von $f(x)$ bestimmen

$$k(x) = e^{x^3}$$

• Kettenregel: $\boxed{\begin{aligned}(f(u(x)))' &= f'(u(x)) \cdot u'(x) \\ &= \text{"Äussere Ableitung} \cdot \text{Innere Ableitung"}\end{aligned}}$

was greift der Exponent 3? (minimal)

$$k(x) = e^{x^3} = e^{(x^3)}$$

$$= \exp(\underbrace{x^3})$$

innere Fn. $\hat{=}$ $u = x^3$ $\longrightarrow$ innere Abl.:

$$u'(x) = (3x^2)$$

$\downarrow$

$\exp(u)$

$\shortparallel$

äussere Fn. $\hat{=}$ e^u $\longrightarrow$ äussere Abl.:

$$e^u \hat{=} e^{(x^3)}$$

$$= \exp(x^3)$$

$k'(x)$ = "äussere Abl." • "innere Abl."

$$\left(e^{x^3}\right)' = (\exp(x^3)) \cdot (3x^2)$$

$$= \underline{\underline{3x^2 \exp(x^3)}} = 3x^2 e^{x^3}$$

Bsp. 2:

$$f(x) = \sin^4(x)$$

mit Kettenregel ableiten, denn:

$$\sin^4(x) = \Big(\underbrace{\sin(x)}_{} \Big)^4$$

innere Fn. $\hat{=}$ $u = \sin(x)$ $\longrightarrow$ innere Abl.:

$u'(x) = \big(\cos(x) \big)$

$\downarrow$

äussere Fn. $\hat{=}$ $(u)^4$ $\longrightarrow$ äussere Abl.:

$4 \cdot (u)^3$

$\hat{=} 4 \cdot (\sin(x))^3$

$= 4 \sin^3(x)$

$f'(x)$ = "innere Abl." • "äussere Abl."

$\downarrow$

$$(\sin^4(x))' = \big(\cos(x)\big) \bullet \big(4 \cdot \sin^3(x)\big)$$

$$= \underline{\underline{4 \cos(x) \sin^3(x)}}$$

MAT182 Zwischenkurs 1

Übungsblock

Ableiten

(Grundregeln)

Vorzeigeaufgaben: $f(x) = \dfrac{3e^x}{5} + x - \sqrt{x} - 3$ $\quad h(x) = \ln(x)\cos(x)$ $\quad h(x) = \dfrac{10^x}{4x-3}$ $\quad k(x) = e^{(x^3)}$

Grundwissen

1. $f(x) = x^n$ — Lösung: nx^{n-1}
2. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ — Lösung: $-3x^{-4}$
3. $f(x) = \frac{5}{6x^2}$ — Lösung: $\frac{-5}{3x^3}$
4. $f(x) = \sin(x)$ — Lösung: $\cos(x)$
5. $f(x) = 3\cos(x)$ — Lösung: $-3\sin(x)$
6. $f(x) = \frac{e^x}{2}$ — Lösung: $\frac{e^x}{2}$
7. $f(x) = \ln(x)$ — Lösung: $\frac{1}{x}$
8. $f(x) = \sqrt{x}$ — Lösung: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Produktregel

1. $f(x) = xe^x$ — Lösung: $e^x + xe^x = e^x(x+1)$
2. $f(x) = (3x^2 + x - 2)e^x$ — Lösung: $e^x(3x^2 + 7x - 1)$
3. $f(x) = x^2\sin(x)$ — Lösung: $2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
4. $f(x) = (x^2 - 2)\sin(x)$ — Lösung: $2x\sin(x) + (x^2 - 2)\cos(x)$
5. $f(x) = x^3\cos(x)$ — Lösung: $3x^2\cos(x) - x^3\sin(x)$
6. $f(x) = (x^3 - 2x + 1)\cos(x)$ — Lösung: $(3x^2 - 2)\cos(x) - (x^3 - 2x + 1)\sin(x)$

Quotientenregel

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3}$ — Lösung: $\frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$
2. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ — Lösung: $\frac{-1}{(x-1)^2}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ — Lösung: $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$
4. $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ — Lösung: $\frac{e^x(x-3)}{x^4} = \frac{e^x x^3 - 3x^2 e^x}{x^6}$
5. $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ — Lösung: $\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2} = \frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$
6. $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$ — Lösung: $\frac{2(x-1)^2 - 2x(2(x-1))}{(x-1)^4} = \frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$
7. $f(x) = \frac{x^2}{\cos(x)}$ — Lösung: $\frac{2x\cos(x) + x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}$
8. $f(x) = \frac{x^2+2x}{\ln(x)}$ — Lösung: $\frac{(2x+2)\cdot\ln(x) - x - 2}{(\ln(x))^2}$

Kettenregel

1. $f(x) = (x^2 + 1)^3$ Lösung: $6x(x^2 + 1)^2$
2. $f(x) = (2x^2 + 3x - 1)^3$ Lösung: $(12x + 9)(2x^2 + 3x - 1)^2$
3. $f(x) = \sqrt{3x - 1}$ Lösung: $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
4. $f(x) = \sqrt{2x^2 + x - 3}$ Lösung: $\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-3}}$
5. $f(x) = \sin(x^2 - 3x)$ Lösung: $(2x - 3)\cos(x^2 - 3x)$
6. $f(x) = \cos(x^3 + 1)$ Lösung: $-3x^2 \sin(x^3 + 1)$
7. $f(x) = e^{3x-1}$ Lösung: $3e^{3x-1}$
8. $f(x) = e^{-x^2}$ Lösung: $-2xe^{-x^2}$
9. $f(x) = 10^{-x}$ (Formel für $(a^x)'$ nachschauen!) Lösung: $-\ln(10) \cdot 10^{-x}$
10. $f(x) = \ln(2x - 3)$ Lösung: $\frac{2}{2x-3}$

Vermischt 1 (selber erkennen wie ableiten)

1. $\frac{3}{\cos(x)}$ Lösung: $\frac{3\sin(x)}{\cos^2(x)}$
2. $\frac{x^2}{\ln(x)}$ Lösung: $\frac{2x\ln(x)-x}{(\ln(x))^2}$
3. $\cos(\sqrt{x})$ Lösung: $\frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
4. $\cos^3(x)$ Lösung: $-3\sin(x)\cos^2(x)$
5. e^{2x} Lösung: $2e^{2x}$
6. $\ln(3x)$ Lösung: $\frac{1}{x}$
7. $3x\cos(x)$ Lösung: $3\cos(x) - 3x\sin(x)$
8. e^{x^2} Lösung: $2xe^{x^2}$
9. $\sin(3x^2)$ Lösung: $6x\cos(3x^2)$
10. $\dfrac{x^2}{-x^3 + 6x - 4}$ Lösung: $\frac{x^4+6x^2-8x}{(-x^3+6x-4)^2}$

MAT182 Zwischenkurs 1

Ableiten

(Prüfungslevel)

Ziel: Auch anspruchsvolle Aufgaben mühlelos hinkriegen

① Überblick haben

(genug Übung)

$$h(x) = \underbrace{\ln(2x)}_{f} \cdot \underbrace{e^{1-4x}}_{g}$$

mit Kettenregel ableiten ← f ↓ g → mit Kettenregel ableiten

Produktregel

② Regel aufschreiben und (einfaches) einsetzen

(Ableitungen erst im nächsten Schritt ausrechnen)

$$h'(x) = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$= \left(\ln(2x)\right)' \cdot e^{1-4x} + \ln(2x) \cdot \left(e^{1-4x}\right)'$$

③ fehlende Ableitungen berechnen (Schritt für Schritt)

(mit voller Konzentration)

$$= \Big(\underbrace{\frac{1}{2x} \cdot 2}_{\frac{\cancel{2}}{\cancel{2}x} = \frac{1}{x}}\Big) \cdot e^{1-4x} + \ln(2x) \cdot \left(e^{1-4x}\right)'$$

$$= \frac{1}{x} \cdot e^{1-4x} + \ln(2x) \cdot \left(e^{1-4x} \cdot (-4)\right)$$

$$= \frac{1}{x} \cdot e^{1-4x} - 4\ln(2x) \cdot e^{1-4x}$$

$$= e^{1-4x}\left(\frac{1}{x} - 4\ln(2x)\right)$$

MAT182 Zwischenkurs 1

Übungsblock

Ableiten

(Prüfungslevel)

Vorzeigeaufgabe: $h(x) = \ln(2x)e^{1-4x}$

Kettenregel und Produktregel

1. $f(x) = x\ln(x^2+3)$ Lösung: $\ln(x^2+3) + \frac{2x^2}{x^2+3}$
2. $f(x) = (2x-1)\ln(x+1)$ Lösung: $2\ln(x+1) + \frac{2x-1}{x+1}$
3. $f(x) = x\ln(x) - x$ Lösung: $\ln(x)$
4. $f(x) = (x^2-2)e^{-x}$ Lösung: $(-x^2+2x+2)e^{-x}$
5. $f(x) = xe^{x^2-1}$ Lösung: $(2x^2+1)e^{x^2-1}$
6. $f(x) = (x^2-2)\sqrt{3x-1}$ Lösung: $2x\sqrt{3x-1} + \frac{3(x^2-2)}{2\sqrt{3x-1}}$

Vermischt 2 (selber erkennen wie ableiten)

1. $f(x) = (x+a)^2 - e^{2x-3}$ Lösung: $2(x+a-e^{2x-3})$
2. $f(x) = (1-e^{ax})^2$ Lösung: $-2ae^{ax}(1-e^{ax})$
3. $f(x) = \left(e^{2x}+e^{-x}\right)^2$ Lösung: $2(e^{2x}+e^{-x})(2e^{2x}-e^{-x})$
4. $f(x) = (x+1)e^x$ Lösung: $(x+2)e^x$
5. $f(x) = (3-2x)e^{-\frac{1}{2}x}$ Lösung: $(x-\frac{7}{2})e^{-\frac{x}{2}}$
6. $f(x) = a(x-3)e^{4x-3}$ Lösung: $(4ax-11a)e^{4x-3}$
7. $f(x) = \dfrac{x^2+1}{e^x}$ Lösung: $\frac{-x^2+2x-1}{e^x}$
8. $f(x) = \dfrac{e^x-1}{e^x+1}$ Lösung: $\frac{2e^x}{(e^x+1)^2}$
9. $f(x) = \dfrac{x}{x-1}$ Lösung: $\frac{-1}{(x-1)^2}$
10. $f(x) = \dfrac{1}{x}(x^2-4)$ Lösung: $1+\frac{4}{x^2}$

Prüfungs-Level Aufgaben

a) $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}$

b) $f(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}}$

c) $f(x) = e^{x^3} \ln(x^2)$

d) $f(x) = \sqrt{e^{x^3}} + \sin(x)$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

f) $f(x) = e^{(\ln(x))^2+C}$

g) $f(x) = \big(\sin(x^2)\big)^3$

h) $f(x) = \big(\sin(\cos(x^3+1))\big)^2$

i) $f(x) = \ln \dfrac{x}{x^2-3x}$

Lösungen Prüfungsaufgaben:

a) $f'(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) xe^{x^2} + \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2} 2x = xe^{x^2}\left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)$

b) $f'(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}$

c) $f'(x) = e^{x^3}\left(3x^2 \ln(x^2) + \frac{2}{x}\right)$

d) $f'(x) = \frac{3x^2 e^{x^3}}{2\sqrt{e^{x^3}}} + \cos(x) = \frac{3}{2}x^2\sqrt{e^{x^3}} + \cos(x)$

e) $f'(x) = \frac{1}{3}\cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

f) $f'(x) = e^{(\ln(x))^2+C} \cdot \frac{2\ln(x)}{x}$

g) $f'(x) = 3 \cdot (\sin(x^2))^2 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

h) $f'(x) = 2\sin\big(\cos(x^3+1)\big) \cdot \cos\big(\cos(x^3+1)\big) \cdot (-\sin(x^3+1)) \cdot 3x^2$

i) $f'(x) = \frac{x^2-3x-x(2x-3)}{x(x^2-3x)} = \frac{-1}{x-3}$

Zusatz-Übungsaufgaben

1. $f(x) = (\ln(x))^2$ Lösung: $\frac{2\ln(x)}{x}$

2. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt[3]{4x} + 1$ Lösung: $2x\sqrt[3]{4x} + x^2(\frac{4}{3}(4x)^{-2/3})$

3. $f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-x^3}}$ Lösung: $\frac{x^2}{\sqrt[3]{(1-x^3)^4}}$

4. $f(x) = \sqrt{x+1} \cdot \ln(x+1)$ Lösung: $f'(x) = \frac{\ln(x+1)}{2\sqrt{x+1}} + \frac{\sqrt{x+1}}{x+1}$

5. $f(x) = 3e^{-x} - 3xe^{-x}$ Lösung: $f'(x) = -6e^{-x} + 3xe^{-x}$

6. $f(x) = (a+bx)e^{-2x}$ Lösung: $f'(x) = (-2a + b - 2bx)e^{-2x}$

7. $f(x) = (a\sin(2x) + b\cos(2x))\, e^x$ Lösung: $f'(x) = (2a\cos(2x) - 2b\sin(2x) + a\sin(2x) + b\cos(2x))\, e^x$

8. $f(x) = \sqrt[3]{(x^2+x)^4}$ Lösung: $\frac{4}{3}(x^2+x)^{\frac{1}{3}}(2x+1)$

9. $f(x) = e^{-(x-3)^2}$. Berechne $f'(x)$ und $f''(x)$ Lösung: $f'(x) = e^{-(x-3)^2}(6-2x)$,

   $f''(x) = e^{-(x-3)^2}\left((6-2x)^2 - 2\right) = e^{-(x-3)^2}(4x^2 - 24x + 34)$