MAT182 PVK

Vorarbeit "Grundlagen"

Vektorgeometrie

Lernkarten

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Vektor zwischen zwei Punkten:

Man rechnet immer Endpunkt - Anfangspunkt.

<u>Beispiel:</u> $A(1,-3,3),\ B(-5,3,0)$

Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ 3-(-3) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Länge eines Vektors:

Die Länge eines Vektors Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist:

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$

<u>Beispiel:</u> $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9$

Länge eines Vektors verändern:

Länge von $\vec{v}$ um λ verändern: $\lambda \cdot \vec{v}$

<u>Beispiel:</u>

Vektor $\overrightarrow{AB}$ (mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 9$) soll Länge 1 haben.

$\Rightarrow$ Wir müssen $\overrightarrow{AB}$ mit 1/9 multiplizieren:

$\overrightarrow{AB} := \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ hat Länge 1.

Paramterdarstellung einer Geraden:

$g:\ \vec{r} =$ Ortsvektor $+\ t\cdot$ Richtungsvektor

Gerade durch zwei Punkte A und B:

$g:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

<u>Beispiel:</u> Gerade g durch $A(1,-3,3)$ und $B(-5,3,0)$

$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Parameterdarstellung einer Ebene:

Ebene durch drei Punkte A, B und C:

$E:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

<u>Beispiel:</u>

Ebene durch $A(1,-3,3), B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

$E:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt & Skalarprodukt:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

(ergibt einen Vektor welcher senkrecht zu $\vec{v}$ und zu $\vec{w}$ steht)

Skalarprodukt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

(um Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu berechnen)

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\ \left|\vec{w}\right|}\right)$$

<u>Beispiel:</u> $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = -6 + 30 + 3 = 27,\ \left|\vec{v_1}\right| = 9,\ \left|\vec{v_2}\right| = \sqrt{27} \rightarrow \cos^{-1}\left(3/\sqrt{27}\right) = 54.74^\circ$

Rechter Winkel $\Longleftrightarrow$ Skalarprodukt $= 0$:

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_3} = -6-6+12 = 0 \rightarrow \cos^{-1}(0) = 90^\circ$, d.h. rechter Winkel zw. $\vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$

Vektorprodukt braucht man um:

- Die Fläche eines Dreiecks ABC zu berechnen:

$$\text{Fläche } \triangle = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$$

- senkrechten Vektor zu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ berechnen:

(z.B. Normalenvektor $\vec{n}$)

$$\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$$

Koordinatengleichung einer Ebene:

$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0$

wobei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n} =$ Normalenvektor

1. Normalenvektor $\rightarrow$ a, b, c bestimmen
2. Punkt in Koordinatengleichung einsetzen
3. Gleichung nach d auflösen

   $\Rightarrow$ Koordinatengleichung der Ebene

Koordinatengleichung einer Ebene:

Beispiel: Ebene E durch $A(1,-3,3)$, $B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

1. Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

   $\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -36 \end{pmatrix} \Rightarrow a = 9, b = -9, c = -36$

2. $A(x = 1, y = -3, z = 3)$ in $9x - 9y - 36z + d = 0$ einsetzen:
3. $9 + 27 - 108 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = 72$

   $\Rightarrow E: \ 9x - 9y - 36z + 72 = 0 \quad : 9 \rightarrow \quad \underline{E: \ x - y - 4z + 8 = 0}$

Schnittpunkt einer Geraden und Ebene:

1. Gerade zusammenfassen:

   $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6t \\ 2-4t \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$

2. Ebene in Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$
3. Für x, y, z die Koordinaten der Geraden einsetzen
4. Gleichung nach t auflösen
5. Lösung in Gerade einsetzen $\rightarrow$ Schnittpunkt

Schnittgerade zweier Ebenen:

1. Koordinatengleichung der Ebenen $\rightarrow \vec{n_1}, \vec{n_2}$
2. Vektorprodukt von $\vec{n_1} \times \vec{n_2} := v \ \widehat{=}$ Richtungsvektor
3. Punkt auf Schnitttgeraden ($\widehat{=}$ Ortsvektor). Z.B.:
   - 1 Vble frei wählen, z.B. $x = 0$
   - in Koordinatengleichungen einsetzen
   - $\rightarrow 2 \times 2$ Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ Punkt
   - $\Rightarrow$ Parameterdarstellung der Schnittgeraden

Neigungswinkel zw. einer Geraden und Ebene:

1) Richtungsvektor der Gerade bestimmen ($=: \vec{v}$)

2) Normalenvektor der Ebene bestimmen ($=: \vec{n}$)

3) Neigungswinkel:

$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right) = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right)$

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen:

1) beide Normalenvektoren ($\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$) bestimmen

2) Schnittwinkel $= \varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}\right)$

Abstand zweier Punkte A und B:

$A(x_1, y_1, z_1), \ B(x_2, y_2, z_2)$

Abstand $= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$

Abstand von Punkt A zur Ebene E:

$A = (x_1, y_1, z_1), \quad E: ax + by + cz + d = 0:$

Abstand $= \dfrac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$

Für alle die die Lernkärtchen gerne gemeinsam anschauen wollen:

In folgendem Video gehe ich die Lernkärtchen Schritt für Schritt durch:

`https://youtu.be/1D5-jOPdDxM`

MAT182 PVK

Vorarbeit "Grundlagen"

Vektorgeometrie

Aufgaben (Selbststudium)

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Vorarbeit - Vektorgeometrie Grundlagen

HS12 - Aufgabe 2:

Wie lautet die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte A(0,0,1), B(0,1,0) und C(1,0,0) geht?

Lösung: $x + y + z - 1 = 0$

Rep-HS15 - Aufgabe 1h) :

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien definiert als $\vec{e}_1 := (5, 0, 0)$ und $\vec{e}_2 := (0, 2, 3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

Lösung: $(0,\ -45,\ 30)^T$

HS17 - Aufgabe 2a): Gegeben seien neben Ursprung $O(0, 0, 0)$ auch die Punkte $A(1, 1, 1)$ und $B(0, 2, 0)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$.

Lösung: a) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{3})$

Rep-HS15 - Aufgabe 2 :

a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten (0,0,1), (0,1,0), (0,0,3).

b) Geben Sie die Cosinus' der drei Winkel des Dreiecks an (kürzen soweit möglich).

Lösung: a) 1 b) in (0,0,1): $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

in (0,1,0): $\cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ in (0,0,3): $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

Rep-HS13 - Aufgabe 2: Wir legen durch die drei Punkte $(1, 0, 0), (0, 1, 0)$ und $(0, 0, 1)$ eine Ebene.

a) Machen Sie dazu eine Skizze und geben Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an (Herleitung wegen schöner Zahlen und Skizze nicht nötig).

b) Geben Sie noch einen zweiten, anderen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an.

c) Wie sieht die Ebenengleichung aus?

d) Welche Winkel hat die Ebene zur xy-Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lasssen]

Lösung: a) $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ b) $\vec{n}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

c) $x + y + z - 1 = 0$ d) $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

HS15 - 1-Minuten Fragen :

b) Sie haben 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, in welchen Fällen das Skalarprodukt 0 ist.

c) Folgt aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ dass auch $\vec{b} = \vec{c}$? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein einfaches Gegeneispiel an.

Lösung: b) wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ Nullvektoren sind; Oder $\vec{a} \perp \vec{b}$ (senkrecht)

c) Nein! (nicht wenn $\vec{a}$ der Nullvektor ist)