



MAT141 PVK

Playlist Zusatz-Video

Inhomogene Differentialgleichungen

Inhomogene DGL:

• DGL-System: $y' = Ay + \underbrace{f(t)}_{\text{inhomogener Teil}}$

Lösungsweg:

① allgemeine Lösung: $y_{\text{allg}}(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{homogen}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{partikulär}}$

① Nur homogene DGL betrachten $\rightarrow y_h(t)$

② Ansatz für $y_p(t)$ analog zu inhomogener Störterm wählen

inhomogener Term $b(t) / f(t)$ ist:

• konstante Zahl $\rightarrow \underline{y_p(t) = A_0}$

• Polynom $a_0 + a_1 t + \dots + a_n t^n \rightarrow \underline{y_p(t) = A_0 + A_1 \cdot t + \dots + A_n \cdot t^n}$

• $e^{at} \rightarrow \underline{y_p(t) = A_0 e^{at}}$

• $\cos(\beta t)$ oder $\sin(\beta t) \rightarrow \underline{y_p(t) = A_0 \cdot \cos(\beta t) + B_0 \cdot \sin(\beta t)}$

Wahl kann je nach Eigenwerten λ_i komplizierter sein $(\cdot t^k)$

③ $y_p(t)$ in DGL einsetzen und Gleichung lösen (nach A_i, B_i)
(und die Ableitung davon: $y_p'(t)$)

④ spezielle Lösung berechnen

rechte Seite $b(t)$	Ansatz für $y_p(t)$:
$b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m$	falls 0 keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m$ falls 0 eine k-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m)$
$(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) e^{\alpha t}$	falls α keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{\alpha t}$ falls α eine k-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k (A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) e^{\alpha t}$
$(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) \cos(\beta t)$ oder $(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) \sin(\beta t)$ oder eine Summe dieser Funktionentypen	falls βi keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)$ falls βi eine k-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k [(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)]$
$(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) e^{\alpha t} \cos(\beta t)$ oder $(b_0 + b_1 t + \dots + b_m t^m) e^{\alpha t} \sin(\beta t)$ oder eine Summe dieser Funktionentypen	falls $\alpha + \beta i$ keine Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $[(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$ falls $\alpha + \beta i$ eine k-fache Lösung der charakteristischen Gleichung ist: $t^k [(A_0 + A_1 t + \dots + A_m t^m) \cos(\beta t) + (B_0 + B_1 t + \dots + B_m t^m) \sin(\beta t)] e^{\alpha t}$

Bsp:
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 + 0 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 + 1 \end{cases}$$
 inhomogener Störterm

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

① allgemeine Lösung: $y_{\text{allg}}(t) = \underbrace{y_h(t)}_{\text{homogen}} + \underbrace{y_p(t)}_{\text{partikulär}}$

① Nur homogene DGL betrachten $\rightarrow y_h(t)$

homog es GL-System:
$$\begin{cases} y_1' = y_1 - y_2 \\ y_2' = 2y_1 - y_2 \end{cases}$$

$$y' = A \quad \hat{=} \quad \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

• EW: $\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 2 & -\lambda \end{pmatrix} = (1-\lambda)(-\lambda) + 2 = -1 + \lambda^2 + 2 \stackrel{!}{=} 0$
 $\lambda^2 = -1 \rightarrow \lambda_1 = i, \lambda_2 = -i$

• EV: $\begin{pmatrix} 1-i & -1 & 0 \\ 2 & -1-i & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{II} - (1+i)\text{I}} \begin{pmatrix} 1-i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$
 $\downarrow$
 $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

• komplexe Lösung: $y = c_1 \cdot e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} + c_2 \cdot e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix}$

• reelle Lösung: $(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y_h(t) = \underbrace{e^{at}}_{e^0 = e^0 = 1} \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$$

② Ansatz für $y_p(t)$ analog zu inhomogener Störterm wählen

• Inhomogener Term: $\begin{matrix} +0 \\ +1 \end{matrix} \rightarrow$ Ansatz $y_p(t) = \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix}$

③ $y_p(t)$ in DGL einsetzen und Gleichung lösen (nach A_i, B_i)

$$\left. \begin{aligned} y_p(t) &= \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} \\ y_p'(t) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} &\text{Inhomogene DGL:} \\ &y_p' = A y_p + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &\hat{=} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_0 \\ B_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_0 - B_0 \\ 2A_0 - B_0 + 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{Gl. sys.: } \begin{vmatrix} 0 = A_0 - B_0 \\ 0 = 2A_0 - B_0 + 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &A_0 = B_0 \\ &\downarrow \\ &0 = A_0 + 1 \Rightarrow A_0 = -1 = B_0 \end{aligned}$$

④ Allg. Lösung: $x_{\text{allg.}}(t) = x_h(t) + x_p(t)$

$$\Rightarrow \underline{\underline{x_{\text{allg.}}(t) = c_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + c_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}}}$$

④ spezielle Lösung berechnen

$$\begin{pmatrix} y_1(0) \\ y_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_1 \begin{pmatrix} \cos(0) \\ \cos(0) + \sin(0) \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} \sin(0) \\ \sin(0) - \cos(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \text{Gl. sys.: } \begin{vmatrix} 1 = c_1 - 1 \\ 0 = c_1 - c_2 - 1 \end{vmatrix} \rightarrow \begin{aligned} &c_1 = 2 \\ &\searrow \\ &0 = 2 - c_2 - 1 \rightarrow c_2 = 1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{spezielle L\u00f6s.: } y(t) = 2 \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{y(t) = \begin{pmatrix} 2\cos(t) - \sin(t) - 1 \\ 3\cos(t) + \sin(t) - 1 \end{pmatrix}}}$$

Ve 13 Aufgabe 2b

(b) (3 points) Lösen Sie das inhomogene Anfangswertproblem

$$y'(t) = 2y(t) + \cos(t), y(0) = 1$$

indem Sie den Ansatz

$$y_p(t) = A \cos t + B \sin t$$

verwenden, um die partikuläre Lösung zu finden.

(b) Wir finden zuerst eine partikuläre Lösung durch Verwendung des vorgeschlagenen Ansatzes:

$$y_p'(t) = -A \sin t + B \cos t = 2y_p(t) + \cos t = (2A + 1) \cos t + 2B \sin t.$$

Daher erhalten wir Gleichungen für A und B :

$$\begin{cases} 2A + 1 &= B \\ 2B &= -A \end{cases}$$

Die zweite Gleichung eingesetzt in die erste ergibt $-4B + 1 = B$, dann erhalten wir $B = 1/5$. Dann erhalten wir $A = -2B = -2/5$. Daher lautet die partikuläre Lösung

$$y_p(t) = \frac{1}{5}(-2 \cos t + \sin t).$$

Die allgemeine Lösung der homogenen Gleichung $y' = 2y$ lautet $y_h(t) = ce^{2t}$, daher erhalten wir die allgemeine Lösung

$$y(t) = y_h(t) + y_p(t) = ce^{2t} + \frac{1}{5}(-2 \cos t + \sin t).$$

Auswertung bei $y = 0$ ergibt

$$1 = y(0) = c - \frac{2}{5} \Rightarrow c = \frac{7}{5},$$

und die Lösung des Anfangswertproblems lautet

$$y(t) = \frac{7}{5}e^{2t} + \frac{1}{5}(-2 \cos t + \sin t).$$