



MAT141 PVK

Kurstag 1

HS24

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat141.html

Programm

(voraussichtlich)

- ① 9:05 Determinante + Inverse
- ② 10:15 LGS
- ③ 11:30 linear unabhängig + Basis
13:15 Basiswechsel
- ④ 14:00 Lineare Abbildungen
- ⑤ 15:20 Komplexe Zahlen

Ablauf

- Vorzeigeaufgabe via Zoom (Fragen via Chat)
- Übungsblock: Fragen stellen via WhatsApp:
+41 79 678 41 41
+ Pause (inkl. Screenshot)

für mehr Arbeit melden

oder siehe Kurshomepage + Zusatz-Videos in der Playlist

Fragen?



MAT141 PVK

Determinante und Inverse

Wichtige Zusammenhänge:

Für eine quadratische $[n \times n]$ Matrix A gilt:

$$\det(A) \neq 0$$

$\Leftrightarrow A$ ist invertierbar

$\Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow r(A) = n$ $r(A) \hat{=}$ Anz. linear unabh. Vektoren

$\Leftrightarrow$ Zeilen- und Spaltenvektoren von A
sind linear unabhängig

Det 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Einige Rechenregeln für Determinanten:

Für quadratische $[n \times n]$ Matrizen A, A^{-1}, B gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \rightarrow \det(A^m) = \left(\det(A)\right)^m$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \det(A^T) = \det(A)$$

$$A \text{ eine } [n \times n] \text{ Matrix} \rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$

Det 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Determinante einer 2x2 Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$$\det A = a \cdot d - c \cdot b$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 3 + 4 = 7$$

Det 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Determinante einer 3x3 Matrix

Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - (-4) = 6$$

Det 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Determinante mit Entwicklungssatz von Laplace:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

• Beispiel: Entwicklungssatz von Laplace:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (2) - 2 \cdot (-2) = 6$$

Det 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Inverse einer Matrix berechnen:

Inverse einer 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer $n \times n$ Matrix:

$$(A \mid I_n) \text{ umformen zu } (I_n \mid A^{-1})$$

Det 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Gauss-Umformungen und Determinante:

• Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren:

→ Determinante bleibt gleich

(analog bei Spalten)

• Vertauschen zweier Zeilen:

→ Determinante ändert das Vorzeichen!

• Multiplizieren einer Zeile mit λ :

→ Determinante wird $\cdot \lambda$ vergrößert!

Det 7

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Übungsblock

Determinante und Inverse

Determinante und Inverse

Vorzeigeaufgaben:

Bestimmen Sie für welche $a \in \mathbb{R}$ die folgende Matrix invertierbar ist und berechnen Sie deren Inverse:

$$A = \begin{pmatrix} a \cos(x) & -\sin(x) \\ a \sin(x) & \cos(x) \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie ob folgende Matrix invertierbar ist und berechnen Sie falls möglich die Inverse.

Berechnen Sie $\det(2B)^{10}$.

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 2 & \frac{1}{2} \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 4

Berechne die Determinante folgender Matrizen

$$B = \begin{pmatrix} a & a \\ 1 & -a \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1-a^2 & a+a^2 \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det B = -a(1+a) \quad \det D = 0$$

HS15 Uebungen Serie 4 Aufgabe 4i)

Berechne die Determinante von $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{25}$

Lösung:

$$\text{i) } \det A = -1$$

HS15 Uebungen Serie 3 Aufgabe 1

Bestimme, welche der folgenden Matrizen regulär sind und berechne deren Inverses.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \\ -1 & 0 & -3 \end{bmatrix}$$

Lösung:

$$\det A = -3 \rightarrow A \text{ regulär und } A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2/3 & -4/3 & 1/3 \\ -2/3 & -1/3 & 1/3 \end{bmatrix}$$

$\det B = 0 \rightarrow$ nicht invertierbar.

Für einen gegebenen Winkel α betrachte man die Matrix M . Berechne die Inverse M^{-1} .

$$M = 7 \begin{pmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ -\cos \alpha & \sin \alpha \end{pmatrix}.$$

Lösung:

$$M^{-1} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} \sin(\alpha) & -\cos(\alpha) \\ \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$



MAT141 PVK

Lineare Gleichungssysteme

Beispiel LGS lösen: 1. Erweiterte Matrix

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} \underbrace{x_1 - x_2}_{A \cdot x} & = & \underbrace{1}_b \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 & = & 5 \\ -3x_2 + 9x_3 & = & 0 \end{array}$$
$$\Rightarrow \text{erweiterte Matrix } (A|b): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

LGS 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: 2. Zeilenstufenform + 3. Gl. lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{Z2 - 2 \cdot Z1} \\ \boxed{Z3 : (-3)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{Z2 \leftrightarrow Z3} \\ \boxed{Z3 + Z2} \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{Z1 + Z2} \\ \boxed{Z2 \leftrightarrow Z3} \\ \boxed{Z3 : (-3)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

$r(A)=3$ "pivots"

$$\Rightarrow L = \{(4, 3, 1)\} \quad \text{mit } \dim(L) = n - r = 3 - 3 = 0$$

LGS 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge eines LGS

$\dim L = n - r =$ "Anzahl Variablen - Anzahl pivots"
 $\hat{=}$ Anzahl frei wählbarer Parameter

LGS $Ax = b$ hat

- hat genau eine Lösung falls $r(A) = n \rightarrow \dim(L) = 0$
- hat unendlich viele Lösungen falls $r(A) < n \rightarrow \dim(L) > 0$
- hat keine Lösung falls das LGS eine Zeile hat
 $0 \ 0 \ 0 \mid \neq 0$

LGS 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: Anzahl Lösungen eines LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & u & v \end{array} \right)$$

- hat genau eine Lösung, falls $u \neq 0, v \in \mathbb{R}$
- hat keine Lösung, falls $u = 0$ und $v \neq 0$
- hat unendlich viele Lösungen, falls $u = 0$ und $v = 0$

LGS 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle

$\dim(L) = n - r(A)$ $L =$ Lösungsmenge eines LGS $Ax=b$

- **Fall 1:** $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$$

$$\dim(L) = n - n = 0$$

(geometrische Interpretation: $L \hat{=}$ Punkt)

$\Rightarrow L$ hat genau 1 Lösung

LGS 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle (Forts.)

- **Fall 2:** $\det(A) = 0$ und LGS unlösbar!

Das LGS hat eine Zeile: $0 \ 0 \ 0 \mid \neq 0$

$\Rightarrow L$ hat keine Lösung

- **Fall 3:** $\det(A) = 0$ und LGS lösbar $r(A) < n$

$$\dim(L) = n - r(A) > 0$$

$$\dim(L) = 1 \rightarrow L \hat{=} \text{Gerade} \quad \dim(L) = 2 \rightarrow L \hat{=} \text{Ebene}$$

$\Rightarrow L$ hat unendlich viele Lösungen

LGS 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Cramersche Regel (um LGS zu lösen):

Ist A eine reguläre $[n \times n]$ Matrix, so hat das LGS $Ax = b$ eindeutige Lösungen $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ mit

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i : i -te Spalte von A durch b ersetzen

LGS 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel Cramersche Regel:

$$\text{LGS } (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3 \cdot 1 - 0 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{x}_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

LGS 8

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Übungsblock

Lineare Gleichungssysteme

Lineare Gleichungssysteme (LGS)

Vorzeigaufgabe:

Bringen Sie folgendes lineares Gleichungssystem

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & - & 2x_2 & - & 5x_3 & = & -5 \end{array}$$

mittels des Gaußschen Eliminationsverfahren in Zeilen-Stufenform (Row Echelon Form) und bestimme danach die Menge aller Lösungen.

HS15 Uebungen Serie 6 Aufgabe 3

Bringen Sie das lineare Gleichungssysteme

$$\begin{array}{ccccccc} 3x_1 & + & x_2 & - & 3x_3 & = & 4 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -2 \end{array}$$

mittels des Gaußschen Eliminationsverfahren in Zeilen-Stufenform (Row Echelon Form) und bestimme danach die Menge aller Lösungen.

Lösung:

$$\mathbb{L} = \{(2 + 11/5x_3, -2 - 18/5x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$$

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 1+2

Bringe die folgenden linearen Gleichungssysteme mittels des Gaußschen Eliminationsverfahren in Zeilen-Stufenform (Row Echelon Form) und bestimme danach die Menge aller Lösungen.

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 2x_2 & + & x_3 & = & 0 \\ \text{i)} & 2x_1 & + & 6x_2 & + & 3x_3 & = & 4 \\ & & 2x_2 & + & 5x_3 & = & -4 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & + & x_4 & = & 3 \\ \text{iii)} & 2x_1 & - & x_2 & + & x_3 & + & 2x_4 & = & 8 \\ & x_1 & - & 5x_2 & + & x_4 & & & = & 5 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & - & 3x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ \text{iv)} & 2x_1 & + & x_2 & - & x_3 & = & 2 \\ & x_1 & + & 4x_2 & - & 2x_3 & = & 1 \\ & 5x_1 & - & 8x_2 & + & 2x_3 & = & 5 \end{array}$$

Lösung:

$$\text{i)} L = \{(-4, 3, -2)\} \quad \text{iii)} L = \{(5 - x_4, 0, -2, x_4), x_4 \in \mathbb{R}\}$$

$$\text{iv)} L = \{(1 + 2/7 \cdot x_3, 3/7 \cdot x_3, x_3), x_3 \in \mathbb{R}\}$$

Vorzeigaufgabe:

Für welche Werte von a und b hat das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} ax_1 & + & (1.5a + 2)x_2 & = & 3 + b \\ -2x_1 & + & (a + 1)x_2 & = & 5 \end{array}$$

- (i) genau eine (ii) keine (iii) unendlich viele Lösungen?

HS15 Uebungen Serie 1 Aufgabe 3

Betrachte das lineare Gleichungssystem dessen erweiterte Koeffizientenmatrix gegeben ist durch

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & a & b \end{array} \right].$$

- i) Für welche Werte von a und b in $\mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem unendlich viele Lösungen?
 ii) Für welche Werte von a und b in $\mathbb{R}$ hat das Gleichungssystem keine Lösungen?

Lösung:

- i) $a = 5, b = 4$ ii) $a = 5, b \neq 4$

Für einen Parameter $s \in \mathbb{R}$ betrachten wir das lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & & & + & 3x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & x_2 & + & 2x_3 & & & & = & 1 \\ & & & & & & (1 + s)x_4 & = & -6 \end{array}$$

- (i) Bestimmen Sie jeweils alle Werte des Parameters s , für die das LGS
 a) keine Lösung hat
 b) eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat,
 c) eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat.
 (ii) Bestimmen Sie die allgemeine Lösung dieses LGS für $s = 2$.

Lösung:

- i) a) $s = -1$ b) nicht möglich c) $s \neq -1$ ii) $\mathbb{L} = \{(3 - 3x_3, 1 - 2x_3, x_3, -2), x_3 \in \mathbb{R}\}$ (1 Vble wählbar $\rightarrow \dim(\mathbb{L}) = 1$)

Gegeben ist das inhomogene lineare Gleichungssystem (LGS)

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcrcrcl} x_1 & - & 2x_3 & + & x_4 & = & 1 \\ & - & x_4 & - & x_3 & + & x_2 & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & ux_3 & + & 6x_4 & = & v \end{array}$$

wobei u und v reelle Parameter sind. Bestimmen Sie alle Parameterpaare (u, v) , für die dieses LGS

- (i) unlösbar ist (ii) genau eine Lösung hat, (iii) eine Lösungsmenge der Dimension 1 hat,
 (iv) eine Lösungsmenge der Dimension 2 hat.

Lösung:

- i) $u = -6, v \neq 4$ ii) nicht möglich iii) $u \neq -6, v \in \mathbb{R}$ iv) $u = -6, v = 4$



MAT141 PVK

Linear unabhängig & Basis

Basis

Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

$$\text{d.h. } \det(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \neq 0$$

Basis 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0}_{\text{LGS}} \stackrel{!}{\implies} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

$$\text{LGS } A\lambda = 0 \quad (\Rightarrow \text{kern}(A) = 0)$$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen:

$$- n \text{ Vektoren } \in \mathbb{R}^n \implies \det(v_1 \ \dots \ v_n) \neq 0$$

- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Basis (des $\mathbb{R}^n$):

- 1) n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \ (\in \mathbb{R}^n)$

orthogonale Basis:

- 1) n linear unabhängige Vektoren
- 2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt = 0)

orthonormale Basis (ONB):

- 1) n linear unabhängige Vektoren
- 2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt = 0)
- 3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Basis 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Euklidisches Skalarprodukt = inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \overline{w_i} \quad (v, w \in \mathbb{C})$$

allgemein gilt für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (= inneres Produkt):

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

- Länge von $v = \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ normiert: $\frac{v}{\|v\|}$

- $\cos(\varphi) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Basis 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

Basis $v_1, \dots, v_n$ gegeben, ist aber nicht orthogonal:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$\vdots$

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w_i, v_j \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \quad \text{für } j = 2, \dots, n$$

Vektoren normieren: $w_i \cdot \frac{1}{\|w_i\|} \longrightarrow \text{ONB}$

Basis 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel aus alten Übungen:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

To find an orthonormal basis of this eigenspace, we set

$$w_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and find w_2' such that $w_2' = v_1 + \lambda v_2$ and $\langle v_1, w_2' \rangle = 0$. This gives us

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + \lambda - (-1) = 2 + \lambda, \text{ so } \lambda = -2$$

and $w_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. We normalise this vector and get

$$w_2 = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Basis 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Basiswechsel / Basiswechselmatrix:

Koordinaten eines Vektors sind (bis jetzt immer) gegeben für Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

$$\text{im } \mathbb{R}^3: [e] = [(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T]$$

Neue Basis $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ gegeben

$\rightarrow$ Koordinaten desselben Vektors für neue Basis $[v]$ berechnen(!)

via **Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}] \rightarrow [\text{zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v] \rightarrow [e]} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ (Matrix bestehend aus neuen Basisvektoren)

Basiswechsel 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Vektor in neuer Basis $[v]$ darstellen:

Koordinaten von w gegeben (für Standardbasis $[e]$)

w' = Koordinaten von w für neue Basis $[v]$:

- 1) $Id_{[v] \rightarrow [e]}$ invertieren (für andere Richtung)

$$\rightarrow Id_{[e] \rightarrow [v]} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^{-1}$$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $(Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^T$

- 2) Koordinaten w' für neue Basis $[v]$ berechnen

$$Id_{[e] \rightarrow [v]} \cdot w_{[e]} = w'_{[v]} = w'$$

Basiswechsel 2

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Übungsblock

Linear unabhängig & Basis

Linear Unabhängig und Basis

Vorzeigeaufgabe: Bilden folgende Vektoren eine Basis von $\mathbb{R}^3$?

Lässt sich der Vektor $b = (5, -2, 2)^T$ als Linearkombination von $a^{(1)}, a^{(2)}$ und $a^{(3)}$ darstellen?

$$a^{(1)} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

HS15 Uebungen Serie 3 Aufgabe 3

i) Entscheide, ob $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $a^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ linear abhängig sind.

ii) Wenn möglich, stelle $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 9 \end{pmatrix}$ als Linearkombination von $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $a^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ dar.

Lösung:

i) nein, linear unabhängig ii) $7 \cdot a^{(1)} - 2 \cdot a^{(2)} = b$

HS15 Uebungen Serie 4 Aufgabe 1

Entscheide, ob folgende Vektoren in $\mathbb{R}^3$ linear abhängig sind oder nicht

ii) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad a^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$ i) $a^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a^{(2)} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$

Lösung:

ii) lin. unabh. (det $\neq 0$ oder Gauss) i) linear unabhängig

HS16 Probeprüfung Aufgabe 1

Betrachten Sie die folgenden Vektoren im $\mathbb{R}^3$:

$$v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix}.$$

a) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

b) Für welche Werte von $a, b \in \mathbb{R}$ ist $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis des $\mathbb{R}^3$?

c) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ so, dass $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ eine Orthogonalbasis ist (vgl. **(b)**).

Skalieren Sie die Vektoren $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ so, dass die skalierten Vektoren eine ON-Basis bilden, und bestimmen Sie die Koordinaten von $u = (1, 1, 1)^T$ bezüglich dieser ON-Basis.

d) Seien $a = 1$ und $b = 0$. Bestimmen Sie den nicht-orientierten Winkel zwischen $v^{(2)}$ und $v^{(3)}$.

Lösung:

a) $a \in \mathbb{R}, b \neq 1$ b) $a = 0, b = -1$

c) $1/\sqrt{3} \cdot v^{(1)}, 1/\sqrt{6} \cdot v^{(2)}, 1/\sqrt{2} \cdot v^{(3)}$ Koo.: $(1/\sqrt{3}, 4/\sqrt{6}, 0)$

d) $\arccos(\sqrt{3}/2)$ ($= \pi/6$)

HS09 Uebungen Serie 12 Aufgabe 3

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch $v_1 = (1, 0, -3, 0)^T$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)^T$ und $v_3 = (3, 2, -3, 0)^T$.

Wie gross ist die Dimension des Untervektorraums welcher von v_1, v_2 und v_3 erzeugt wird?

Lösung:

2

HS17 Uebungen Serie 7 Aufgabe 1

Entscheide, ob folgende Vektoren in $\mathbb{C}^2$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ bilden:

$$(a) \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2+2i \\ -2-2i \end{pmatrix} \quad (b) \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -i \\ 2+2i \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 0 \rightarrow$ linear abhängig $\Rightarrow$ keine Basis
(b) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 1 + 6i \neq 0 \rightarrow$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis

Basiswechsel

Vorzeigeaufgabe:

Gegeben die Basen $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Basiswechselmatrizen $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$, $\text{Id}_{[w] \rightarrow [e]}$ und $\text{Id}_{[e] \rightarrow [w]}$.

Bestimme die Koordinatendarstellung von $x = (-1, 4)^T$ in der Basis $[w]$.

HS15 Ue 8 Aufgabe 2 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ folgende Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

i) Verifiziere, dass $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimme $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$ und verifiziere, dass $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$ und $\text{Id}_{[e] \rightarrow [v]}$ orthogonal sind. Orthogonale Matrizen! (siehe Lernkärtchen)

iii) Berechne die Koordinaten von $x = (1, 2, 1)^T$ und $y = (1, 0, 1)^T$ als Linearkombination von $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$.

Lösung:

$$i) \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \quad ii) \text{Id}_{[v] \rightarrow [e]} = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$$

$$\text{ist orthogonal: } \text{Id}_{[v] \rightarrow [e]} \cdot \text{Id}_{[e] \rightarrow [v]} = \text{Id}_{[v] \rightarrow [e]} \cdot (\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]})^T = I_3$$

$$iii) \text{Id}_{[e] \rightarrow [v]} \cdot x = (-4/\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2/\sqrt{3}) \text{ und } \text{Id}_{[e] \rightarrow [v]} \cdot y = (0, \sqrt{2}, 0)$$



MAT141 PVK

Basiswechsel

Basis

Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

$$\text{d.h. } \det(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \neq 0$$

Basis 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0}_{\text{LGS}} \stackrel{!}{\implies} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

$$\text{LGS } A\lambda = 0 \quad (\Rightarrow \text{kern}(A) = 0)$$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen:

$$- n \text{ Vektoren } \in \mathbb{R}^n \implies \det(v_1 \ \dots \ v_n) \neq 0$$

- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Basis (des $\mathbb{R}^n$):

- 1) n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n \ (\in \mathbb{R}^n)$

orthogonale Basis:

- 1) n linear unabhängige Vektoren
- 2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt = 0)

orthonormale Basis (ONB):

- 1) n linear unabhängige Vektoren
- 2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt = 0)
- 3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Basis 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Euklidisches Skalarprodukt = inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \overline{w_i} \quad (v, w \in \mathbb{C})$$

allgemein gilt für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (= inneres Produkt):

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

- Länge von $v = \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ normiert: $\frac{v}{\|v\|}$

- $\cos(\varphi) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Basis 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

Basis $v_1, \dots, v_n$ gegeben, ist aber nicht orthogonal:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$\vdots$

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w_i, v_j \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \quad \text{für } j = 2, \dots, n$$

Vektoren normieren: $w_i \cdot \frac{1}{\|w_i\|} \longrightarrow \text{ONB}$

Basis 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel aus alten Übungen:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

To find an orthonormal basis of this eigenspace, we set

$$w_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and find w_2' such that $w_2' = v_1 + \lambda v_2$ and $\langle v_1, w_2' \rangle = 0$. This gives us

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + \lambda - (-1) = 2 + \lambda, \text{ so } \lambda = -2$$

and $w_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. We normalise this vector and get

$$w_2 = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Basis 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Basiswechsel / Basiswechselmatrix:

Koordinaten eines Vektors sind (bis jetzt immer) gegeben für Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

$$\text{im } \mathbb{R}^3: [e] = [(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T]$$

Neue Basis $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ gegeben

$\rightarrow$ Koordinaten desselben Vektors für neue Basis $[v]$ berechnen(!)

via **Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}] \rightarrow [\text{zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v] \rightarrow [e]} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ (Matrix bestehend aus neuen Basisvektoren)

Basiswechsel 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Vektor in neuer Basis $[v]$ darstellen:

Koordinaten von w gegeben (für Standardbasis $[e]$)

w' = Koordinaten von w für neue Basis $[v]$:

- 1) $Id_{[v] \rightarrow [e]}$ invertieren (für andere Richtung)

$$\rightarrow Id_{[e] \rightarrow [v]} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^{-1}$$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $(Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^T$

- 2) Koordinaten w' für neue Basis $[v]$ berechnen

$$Id_{[e] \rightarrow [v]} \cdot w_{[e]} = w'_{[v]} = w'$$

Basiswechsel 2

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Übungsblock

Basiswechsel

HS09 Uebungen Serie 12 Aufgabe 3

Seien $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^4$ gegeben durch $v_1 = (1, 0, -3, 0)^T$, $v_2 = (1, 1, 0, 0)^T$ und $v_3 = (3, 2, -3, 0)^T$.

Wie gross ist die Dimension des Untervektorraums welcher von v_1, v_2 und v_3 erzeugt wird?

Lösung:

2

HS17 Uebungen Serie 7 Aufgabe 1

Entscheide, ob folgende Vektoren in $\mathbb{C}^2$ eine Basis von $\mathbb{C}^2$ bilden:

$$(a) \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ -1+i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -2+2i \\ -2-2i \end{pmatrix} \quad (b) \quad v^{(1)} = \begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \end{pmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{pmatrix} -i \\ 2+2i \end{pmatrix}$$

Lösung:

(a) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 0 \rightarrow$ linear abhängig $\Rightarrow$ keine Basis
(b) $\det(v^{(1)}, v^{(2)}) = 1 + 6i \neq 0 \rightarrow$ linear unabhängig $\Rightarrow$ Basis

Basiswechsel

Vorzeigaufgabe:

Gegeben die Basen $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Bestimme die Basiswechselmatrizen $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$, $\text{Id}_{[w] \rightarrow [e]}$ und $\text{Id}_{[e] \rightarrow [w]}$.

Bestimme die Koordinatendarstellung von $x = (-1, 4)^T$ in der Basis $[w]$.

HS15 Ue 8 Aufgabe 2 Sei $\langle \cdot, \cdot \rangle$ das Euklidische Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ und $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ folgende Vektoren

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{6}} \\ -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}.$$

i) Verifiziere, dass $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$ eine Orthonormalbasis des $\mathbb{R}^3$ ist.

ii) Bestimme $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$ und verifiziere, dass $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$ und $\text{Id}_{[e] \rightarrow [v]}$ orthogonal sind. Orthogonale Matrizen! (siehe Lernkärtchen)

iii) Berechne die Koordinaten von $x = (1, 2, 1)^T$ und $y = (1, 0, 1)^T$ als Linearkombination von $v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}$.

Lösung:

$$i) \langle v^{(i)}, v^{(j)} \rangle = \delta_{ij} \quad ii) \text{Id}_{[v] \rightarrow [e]} = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$$

$$\text{ist orthogonal: } \text{Id}_{[v] \rightarrow [e]} \cdot \text{Id}_{[e] \rightarrow [v]} = \text{Id}_{[v] \rightarrow [e]} \cdot (\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]})^T = I_3$$

$$iii) \text{Id}_{[e] \rightarrow [v]} \cdot x = (-4/\sqrt{6}, \sqrt{2}, 2/\sqrt{3}) \text{ und } \text{Id}_{[e] \rightarrow [v]} \cdot y = (0, \sqrt{2}, 0)$$



MAT141 PVK

Lineare Abbildungen

Abbildungsmatrix (für Standardbasis [e]) aufstellen:

Abbildungsvorschrift $T : (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

(ist in der Aufgabenstellung) vorgegeben:

$$\left(\underbrace{\text{Abbildungsmatrix}}_{T_{[e] \rightarrow [e]}} \right) \cdot (\text{urspr. Vektor}) = (\text{neuer Vektor})$$

$$\begin{pmatrix} \text{ablesen / ergänzen} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{gegeben}) \\ (\text{gegeben}) \\ (\text{gegeben}) \\ (\text{gegeben}) \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

(Vorzeige-)Aufgaben dazu auf Homepage!

Abbildungsmatrix für Polynom-Vektorraum $\mathbb{P}_n$:

$$\text{Standard-Basis für } \mathbb{P}_n: \begin{pmatrix} x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{n-1} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

1) Vektor f & Bildvektor $T(f)$ in geg. Basis ausdrücken

2) Abbildungsmatrix via Matrizenmultiplikation aufstellen:

$$T \cdot f = T(f)$$

Lineare Abbildung 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Bild und Kern einer linearen Abbildung:

Lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ (mit Abbildungsmatrix A)

$$\text{Bild}(f) = \text{range}(f) := \{f(x) \mid x \in V\} \subset W$$

$$\text{Kern}(f) = \text{kernel}(f) = \text{Null}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V$$

Hinweis: beide sind Untervektorräume(!) mit

$$\text{Dimension vom Bild} = r(A) \quad \text{Dimension vom Kern} = n - r(A)$$

$$\text{allg. gilt: } \dim(\text{Bild}) + \dim(\text{Kern}) = n$$

Lineare Abbildung 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Abbildungsmatrix für andere Basen angeben:

Gegeben: Abbildungsmatrix ($= T_{[e] \rightarrow [e]}$)

$$T_{[v] \rightarrow [w]} = Id_{[e] \rightarrow [w]} \cdot T_{[e] \rightarrow [e]} \cdot Id_{[v] \rightarrow [e]}$$

$$\text{wobei } Id_{[v] \rightarrow [e]} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{und } Id_{[e] \rightarrow [v]} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} \text{ (invertieren)}$$

falls $[w]$ eine ONB ist gilt: $Id_{[e] \rightarrow [w]} = (Id_{[w] \rightarrow [e]})^T$

Lineare Abbildung 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel Abbildungsmatrix für $\mathbb{P}_n$:

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \in \mathbb{P}_3$$

$$T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad T(f) = 3az^2 + 2bz + c$$

$$1) \text{ Koeff. für Standardbasis: } f(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad T(f) = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ Abb.matrix: } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension von C_A und Basis von C_A :

Lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$

mit Abbildungsmatrix A

$$\bullet \dim(C_A) = \text{rank}(A) = r(A)$$

• Basis von C_A :

$r(A)$ linear unabhängige Spaltenvektoren von A

Lineare Abbildung 6

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Übungsblock

Lineare Abbildungen

Lineare Abbildungen

Vorzeigeaufgabe: Gegeben die Basen $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 3 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Die lineare Abbildung T sei gegeben durch $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2 - 3x_3 \\ 4x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

- i) Bestimme die Matrixdarstellung $T_{[e] \rightarrow [e]}$ bezüglich der Standardbasis $[e]$.
- ii) Bestimme die Basiswechselmatrizen $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$, $\text{Id}_{[w] \rightarrow [e]}$ und $\text{Id}_{[e] \rightarrow [w]}$.
- iii) Bestimme die Matrixdarstellung $T_{[v] \rightarrow [w]}$.
- iv) Sei x bezüglich der Standardbasis $[e]$ gegeben durch $x = (1, -1, 2)^T$. Bestimmen Sie die Koordinatendarstellung x' bezüglich der Basis $[v]$ von x . Berechnen Sie $T(x)$ in beiden Basisdarstellungen als $T_{[e] \rightarrow [e]}x$ und $T_{[v] \rightarrow [w]}x'$.

HS15 Uebung 7 Aufgabe 4 Betrachte die Basis $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}, v^{(3)}]$ von $\mathbb{R}^3$ und $[w] = [w^{(1)}, w^{(2)}]$ von $\mathbb{R}^2$ mit

$$v^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad v^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad v^{(3)} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Berechne die Matrixdarstellung von $T_{[v] \rightarrow [w]}$ von

$$\text{i) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2x_3 \\ x_1 \end{bmatrix} \quad \text{ii) } T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 - x_2 \\ x_1 + x_3 \end{bmatrix}$$

Lösung: i) $T_{[v] \rightarrow [w]} = \begin{bmatrix} 0 & -4 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ ii) $T_{[v] \rightarrow [w]} = \begin{bmatrix} -1 & -3 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

HS15 Uebungen Serie 7 Aufgabe 3 Betrachte die folgenden Basen von $\mathbb{R}^2$

$$[e] = [e^{(1)}, e^{(2)}], \quad [v] = [e^{(2)}, e^{(1)}], \quad [w] = [w^{(1)}, w^{(2)}], \quad \text{wobei } w^{(1)} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad w^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Sei $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ die lineare Abbildung mit Matrixdarstellung $f_{[e] \rightarrow [e]} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

- i) Bestimme $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]}$ und $\text{Id}_{[e] \rightarrow [v]}$.
- ii) Bestimme $f_{[v] \rightarrow [e]}$ und $f_{[v] \rightarrow [v]}$.
- iii) Bestimme $f_{[w] \rightarrow [w]}$.

Lösung: i) $\text{Id}_{[v] \rightarrow [e]} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \text{Id}_{[e] \rightarrow [v]}$ ii) $f_{[v] \rightarrow [e]} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ und $f_{[v] \rightarrow [v]} = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$ iii) $f_{[w] \rightarrow [w]} = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}$



MAT141 PVK

Komplexe Zahlen

Fundamentaler Satz der Algebra:

Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ vom Grad $n \geq 1$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$

hat (**bei "Mehrfachzählung"*) immer n Nullstellen und

kann geschrieben werden in der Form: $p(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$.

*Bsp.

$$p(z) = z^3 - 2z^2 + z = 1 \cdot (z-0) \cdot \underline{(z-1)} \cdot \underline{(z-1)} = z^1 \cdot (z-1)^2$$

Komplexe Zahlen 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Bsp. quadratische Gleichung:

$$p(z) = z^2 - 2z + 2$$

hat Grad $n = 2$ und somit in $\mathbb{C}$ genau 2 Nullstellen*:

Mitternachtsformel: $a = 1, b = -2, c = 2$:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$\rightarrow z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

$$\Rightarrow \text{komplex konjugierte Lösung } z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+i} = 1 - i$$

Komplexe Zahlen 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Komplexe Zahlen:

- $i^2 = -1$

- Kartesische Koordinaten: $z = a + ib = \underbrace{a}_{\text{Re}(z)} + i \cdot \underbrace{b}_{\text{Im}(z)}$
(Normalform)

- Komplex konjugiertes: $\bar{z} = a - ib$

Hinweis: komplexe Lösungen sind immer paarweise konjugiert!

(d.h. quadr. Gleichung mit Lös. $x_1 = a + i \cdot b \rightarrow x_2 = a - i \cdot b$)

Komplexe Zahlen 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Polarkoordinaten ($\longleftrightarrow$ kartesischen Koordinaten):

Polarkoordinaten: $z = r e^{i \cdot \varphi}$ (kart. Koo.: $z = a + i \cdot b$)

$$r = |z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\arctan \text{ hat 2 Lösungen!!} \rightarrow \text{kontrolliere } a)$$

(oder φ graphisch bestimmen)

mit $\underline{a = r \cdot \cos(\varphi)} \quad b = r \cdot \sin(\varphi)$

Komplexe Zahlen 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Gleichung lösen in Polarkoordinaten:

Gleichungen der Form:

$$w^n = a + ib \quad \text{oder} \quad w = \sqrt[n]{a + ib}$$

(kann rechts auch eine reelle Zahl sein $\rightarrow b = 0$)

In Polarform umschreiben! $\Rightarrow w = \sqrt[n]{r} e^{i \cdot \varphi}$

hat n Lösungen:

$$w_1, \dots, w_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (k-1) \right)}, \quad k = 1, \dots, n$$

(siehe Beispiel rechts)

Komplexe Zahlen 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: Gleichung lösen in Polarkoordinaten

$$w^3 = 1 + i \quad \hat{=} \quad w = \sqrt[3]{1+i} \quad \text{hat 3 Lösungen!}$$

Polarkoordinaten von $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}$

Formel: $w_1, \dots, w_3 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot (k-1) \right)}, \quad k = 1, \dots, 3$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 0 \right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} \right)},$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 1 \right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{9\pi}{12} \right)},$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 2 \right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{17\pi}{12} \right)}$$

Komplexe Zahlen 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Bruch vereinfachen zu Komplexer Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Beispiel: $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 + 2i$

$$= \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{(4+2i) \cdot (4-2i)} = \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{4^2 + 2^2} = \frac{(3 \cdot 4 + \overbrace{5 \cdot 4}^{-i^2} + i \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 2))}{20}$$

$$= \frac{22 + i \cdot (14)}{20} = \frac{22}{20} + i \frac{14}{20} = 1.1 + 0.7i$$

Komplexe Zahlen 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Multiplikation / Division mit Polarkoordinaten:

$$z_1 = r_1 e^{i \cdot \varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i \cdot \varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i \cdot \varphi_1}) \cdot (r_2 e^{i \cdot \varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} \quad z^n = (r \cdot e^{i \varphi})^n = r^n \cdot e^{i \cdot (n \cdot \varphi)}$$

Komplexe Zahlen 8

www.mathcourses.ch/mat141.html



MAT141 PVK

Übungsblock

Komplexe Zahlen

Komplexe Zahlen

Vorzeigeaufgaben:

Bestimme für $z = 1 - i$ explizit die Polarkoordinaten r, φ und berechne alle Lösungen von $z^3 = 1 - i$.

HS18 Uebungen Serie 5 Aufgabe 2

(a) Geben Sie die Polarform folgender komplexer Zahlen an:

$$z_1 = i - 1, \quad z_2 = \sqrt{3} - i, \quad z_3 = 2, \quad z_4 = -i, \quad z_5 = 2 + 2\sqrt{3}i.$$

(b) Berechnen Sie folgende Multiplikationen und Divisionen mittels Polarform.

Geben Sie die Resultate in kartesischer Form an!

$$z_1 z_4, \quad \frac{z_5}{z_2}, \quad z_2 z_5, \quad \frac{z_1}{z_4}.$$

Lösung:

$$(a) \quad z_1 = \sqrt{2}e^{i \cdot 3\pi/4} \quad z_2 = 2e^{-i \cdot \pi/6} \quad z_3 = 2e^{i \cdot 0} \quad z_4 = 1e^{i \cdot 3\pi/2} \quad z_5 = 4e^{i \cdot \pi/3} \\ (b) \quad z_1 z_4 = 1 + i \quad \frac{z_5}{z_2} = 2i \quad z_2 z_5 = 4\sqrt{3} + 4i \quad \frac{z_1}{z_4} = -1 - i$$

HS15 Uebungen Serie 5 Aufgabe 2

ii) Bestimme für $z = 1 + i$ explizit die Polarkoordinaten r, φ und berechne alle möglichen Werte von $\sqrt[5]{z}$.

Lösung:

$$\text{ii) } \sqrt[5]{2}e^{i(\pi/20 + 2\pi j/5)}, \quad 0 \leq j \leq 4$$

Lösen Sie die folgenden Gleichungen in $\mathbb{C}$:

$$\text{a) } 4z^2 + 8z + 29 = 0, \quad \text{b) } z^3 = i$$

Lösung:

$$\text{a) } z_1 = -1 + \frac{5}{2}i, \quad z_2 = -1 - \frac{5}{2}i \quad \text{b) } z_0 = 1 \cdot e^{i \frac{\pi}{6}}, \quad z_0 = 1 \cdot e^{i \frac{5\pi}{6}}, \quad z_2 = 1 \cdot e^{i \frac{9\pi}{6}}$$

HS18 Uebungen Serie 6 Aufgabe 4a)

Löse folgendes komplexe lineare Gleichungssystem:

$$(i) \quad \begin{aligned} z_1 + iz_2 &= 2 \\ (1+i)z_1 + (i-1)z_2 &= 2i + 2 \end{aligned}$$

Lösung:

$$(i) \quad L = \{(2 - iz_2, z_2), \quad z_2 \in \mathbb{C}\}$$

HS18 Uebungen Serie 6 Aufgabe 4b

Berechne die Determinante für folgende Matrizen. Gib an, ob sie regulär sind und falls ja, berechne die Inverse.

$$A = \begin{pmatrix} i & 1 \\ 1 & -i \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ i & 1-i \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 0 & i & 2 \\ 2 & 1+2i & 8 \\ 2 & 1+i & 6 \end{pmatrix}$$

Lösung:

$$\det(A) = 0 \quad \det(B) = 2 - i \rightarrow B^{-1} = \frac{1}{2-i} \begin{pmatrix} 1-i & -1 \\ -i & 1+i \end{pmatrix} \quad \det(D) = 0$$



MAT141 PVK

Fragen?



MAT141 PVK

Playlist Zusatz-Video

Dimension bestimmen (einer Matrix)



MAT141 PVK

Playlist Zusatz-Video

Lineare Abbildung: Vektorraum der Polynome