# MAT141 PVK

Kurstag 2

HS24

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat141.html

# Programm

(voraussichtlich)

⑥ 9:05 Eigenwert / Eigenvektoren

⑦ 10:00 Eigenwertprobleme

⑧ 11:30 Zeige dass / Prüfe ob

⑨ 14:00 DGL-Systeme

15:15 Komplexe DGL / Euler's formula

# Ablauf

- Vorzeigeaufgabe via Zoom (Fragen via Chat)
- Übungblock: Fragen stellen via WhatApp:
  + Pause
  +41 79 678 41 41
  (inkl. Screenshot)

für mehr Arbeit melden

oder siehe Kurshomepage + Zusatz-Videos in der Playlist

# Wünsche?

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Eigenwert und Eigenvektoren

**Eigenwerte (EW) berechen:**

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

oder $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ (gibt dasselbe)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$

$a_i$ ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert $\lambda_i$



**Kubische Gleichung lösen:**

- 1 Nullstelle erraten
- Polynomdivision $\Rightarrow$ restl. NS via "Mitternachtsformel"
  https://www.youtube.com/watch?v=K8K4_gowb4E

Beispiel **"verstecke Quadr. Gl.:"**

$ax^6 + bx^3 + c = 0$

$z = x^3$ substituieren $\Rightarrow$ $az^2 + bz + c = 0$



**Eigenvektor (EV) $v$ zum EW $\lambda$:**

Erfüllt: $Av = \lambda v$ $(v \neq 0)$

Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

$(A - \lambda \cdot I_n)\, v = 0$ lösen (homogenes LGS)

(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$\dim(E_{\lambda_i})$ = **geometrische Multiplitzität** vom EW $\lambda_i$

und $1 \leq$ geom. Multipl. $\leq$ algebr. Multipl.



**Spektrum einer linearen Abbildung $f_A$:**

Lineare Abbildung $f_A : V \to W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte
inkl. algebr. Multiplizität!
(d.h. Mehrfachauflistung)

$\mathrm{spec}(A) = \{\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n = \ldots\}$



**Eine Matrix $A$ ist diagonalisierbar:**

Eine lineare Abbildung $f_A$ / Matrix $A$ ist diagonalisierbar, **falls es eine Basis** $[v] = [v_1, \ldots, v_n]$ **gibt bestehend aus Eigenvektoren von** $A$**.**

$\Longrightarrow A = SDS^{-1}$

mit $S = \begin{pmatrix} v_1 \ldots v_n \end{pmatrix}$

und Diagonalmatrix $D = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$

(Eigenwerte in der Diagonalen)

Hinweis: $S \mathrel{\hat{=}} Id_{[v]\to[e]}$, $D \mathrel{\hat{=}} f_{[v]\to[v]}$



**Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar!**

Falls $A$ **symmetrisch** ist (d.h. $A^T = A$) gilt:

- $A$ ist diagonalisierbar
- Die Eigenvektoren von $A$ bilden eine **Orthonormalbasis**

$\to S^{-1} = S^T$,

da $S = \begin{pmatrix} v_1 \ldots v_n \end{pmatrix}$ eine *orthogonale Matrix* ist

$\Rightarrow A = SDS^T$ (mit $D = f_{[v]\to[v]}$)

Hinweis: symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte



**Orthogonale (= unitäre) Matrix:**

**Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ **ist orthogonal** $\iff A^T = A^{-1}$

prüfe: $A^T A = \mathrm{Id}_n = AA^T \quad \Rightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$

$A$ orthogonale Matrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden eine ONB

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist **unitär** $\iff \overline{A}^T = A^{-1}$,

d.h. $\overline{A}^T A = \mathrm{Id} = A\overline{A}^T \iff$ Vektoren bilden ONB



**Orthogonale (= unitäre) Matrix überpüfen:**

$A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ ist orthogonal, falls: $A^T A = \mathrm{Id}$

oder Spaltenvektoren $a_1 \ldots a_n$ eine orthonormale Basis (ONB) bilden:

- orthogonal: $\langle a_i, a_j \rangle = 0 \qquad 1 \leq i \neq j \leq n$
- Länge 1: $||\ a_i\ || = \sqrt{\langle a_i, a_i \rangle} = 1 \qquad 1 \leq i \leq n$

$A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ist unitär, falls $\overline{A}^T A = \mathrm{Id}$ oder Vektoren = ONB

Aufpassen im komplexen! $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot \overline{w_1} + \ldots + v_n \cdot \overline{w_n}$

$< (1+i), (1+i) >= (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Übungsblock

# Eigenwert und Eigenvektoren

# Definition von EW und EV nutzen

Vorzeigeaufgabe: **ETH Caspar So12 Aufgabe 3c)**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$. Zeigen Sie, dass $v = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $A$ ist und bestimmen Sie den zugehörigen Eigenwert.

**Cannas Zwischenprüfung HS13 Aufgabe 7:**

Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

**Lösung:** (d)

**Cannas Zwischenprüfung HS14 - Aufgabe 9:**

Welcher der folgenden Vektoren ist ein Eigenvektor von $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$?

(a) $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ (b) $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ (c) $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ (d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

**Lösung:** (a)

**ETH Caspar Wi13 Aufgabe 3d)**

Gegeben sei die Matrix $A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Angenommen, dass es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, sodass $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ a \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $A$ zum Eigenwert $\lambda$ ist. Bestimmen Sie dieses $a$ und den Eigenwert $\lambda$.

**Lösung:** $a = 1, \quad \lambda = 3$

**ETH Caspar Wi15 Aufgabe 2f)**

Sei $C = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Finden Sie ein Paar $(x, y)$, so dass $\begin{pmatrix} x \\ y \\ 0 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor von $C$ ist.

**Lösung:** $(x_1, y_1) = (1, -1) \quad (x_2, y_2) = (1, 0)$

# Eigenwerte / Eigenvektoren berechnen

Vorzeigeaufgabe:

Gegeben ist die Matrix

$$C = \begin{pmatrix} -2 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Berechnen Sie die Eigenwerte $\lambda_1, \lambda_2$ von $C$ und bestimmen Sie ein Orthonormalsystem $\mathcal{B} = \{\underline{x}^1, \underline{x}^2\}$.

**Übung FS15:**

Bestimmen Sie die Eigenvektoren der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** (Vielfaches von) $(1,\ 1)^T,\ (1,\ -1)^T$

**Übung FS15:**

Bestimmen Sie das charakteristische Polynom, Eigenwerte, Eigenvektoren und Orthonormalsystem von

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** $p(\lambda) = \lambda^2 - 9\lambda + 14 \qquad \lambda_1 = 2, \lambda_2 = 7, \qquad \underline{x}_1 = (-2,\ 1)^T,\ \underline{x}_2 = (-1,\ -2)^T$
ONS $= \{\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,\ 1), \frac{1}{\sqrt{5}}(-1,\ -2)\}$

**ETH Caspar Wi17 Aufgabe 2c)**

Die Matrix $A$ sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ein Eigenwert von $A$ ist $\lambda_1 = 2$. Geben Sie die beiden anderen Eigenwerte von $A$ an.

**Lösung:** $\lambda_2 = 0,\ \lambda_3 = -1$

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Diagonalisieren

**Eigenwerte (EW) berechen:**

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

oder $\qquad \det(\lambda \cdot I_n - A) = 0 \quad$ (gibt dasselbe)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$$

$a_i$ ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert $\lambda_i$



**Kubische Gleichung lösen:**

- 1 Nullstelle erraten
- Polynomdivision $\Rightarrow$ restl. NS via "Mitternachtsformel"
  https://www.youtube.com/watch?v=K8K4_gowb4E

Beispiel **"versteckte Quadr. Gl.:"**

$ax^6 + bx^3 + c = 0$

$z = x^3$ substituieren $\Rightarrow \quad az^2 + bz + c = 0$



**Eigenvektor (EV) $v$ zum EW $\lambda$:**

Erfüllt: $\quad Av = \lambda v \qquad (v \neq 0)$

Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

$(A - \lambda \cdot I_n)\, v = 0$ lösen (homogenes LGS)

(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$\dim(E_{\lambda_i})$ = **geometrische Multiplitzität** vom EW $\lambda_i$

und $\qquad 1 \leq$ geom. Multipl. $\leq$ algebr. Multipl.



**Spektrum einer linearen Abbildung $f_A$:**

Lineare Abbildung $f_A : V \to W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte
inkl. algebr. Multiplizität!
(d.h. Mehrfachauflistung)

$$\text{spec}(A) = \{\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots, \ \ldots\ldots, \ \lambda_n = \ldots\}$$



**Eine Matrix $A$ ist diagonalisierbar:**

Eine lineare Abbildung $f_A$ / Matrix $A$ ist diagonalisierbar, **falls es eine Basis** $[v] = [v_1, \ldots, v_n]$ **gibt bestehend aus Eigenvektoren von** $A$.

$$\Longrightarrow \ A = SDS^{-1}$$

$$\text{mit } S = \begin{pmatrix} v_1 \ldots v_n \end{pmatrix}$$

und Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
(Eigenwerte in der Diagonalen)

Hinweis: $S \mathrel{\hat{=}} Id_{[v]\to[e]}, \quad D \mathrel{\hat{=}} f_{[v]\to[v]}$



**Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar!**

Falls $A$ **symmetrisch** ist (d.h. $A^T = A$) gilt:

- $A$ ist diagonalisierbar
- Die Eigenvektoren von $A$ bilden eine **Orthonormalbasis**
  $\to S^{-1} = S^T$,
  da $S = \begin{pmatrix} v_1 \ldots v_n \end{pmatrix}$ eine *orthogonale Matrix* ist

$\Rightarrow A = SDS^T \qquad$ (mit $D = f_{[v]\to[v]}$)

Hinweis: symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte



**Orthogonale (= unitäre) Matrix:**

**Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **ist orthogonal** $\iff A^T = A^{-1}$

prüfe: $\quad A^T A = \text{Id}_n = AA^T \qquad \Rightarrow \quad \det(A) \in \{-1, 1\}$

$A$ orthogonale Matrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden eine ONB

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist **unitär** $\iff \overline{A}^T = A^{-1}$,

d.h. $\overline{A}^T A = \text{Id} = A\overline{A}^T \iff$ Vektoren bilden ONB



**Orthogonale (= unitäre) Matrix überpüfen:**

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal, falls: $A^T A = \text{Id}$

oder Spaltenvektoren $a_1 \ldots a_n$ eine orthonormale Basis (ONB) bilden:

- orthogonal: $\quad \langle a_i, a_j \rangle = 0 \qquad 1 \leq i \neq j \leq n$
- Länge 1: $\quad || \, a_i \, || = \sqrt{\langle a_i, a_i \rangle} = 1 \qquad 1 \leq i \leq n$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist unitär, falls $\overline{A}^T A = \text{Id}$ oder Vektoren = ONB

Aufpassen im komplexen! $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot \overline{w_1} + \ldots + v_n \cdot \overline{w_n}$

$< (1+i), (1+i) >= (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Übungsblock

# Diagonalisieren

# Diagonalisierbar

Vorzeigeaufgaben:

Berechne die Eigenwerte sowie deren algebraischen Vielfachheiten und Eigenräume von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Ist die Matrix diagonalisierbar?}$$

Ist folgende Matrix B diagonalisierbar? Falls ja, wieso und bestimmen Sie eine ON-Basis, zu der B Diagonalform hat.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Berechnen Sie } B^{20}.$$

## HS15 Probeprüfung Aufgabe 3

Betrachte die 3 x 3 Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

i) Berechne die Eigenwerte von $A$.

ii) Bestimme eine orthonormierte Basis $[v]$ von $\mathbb{R}^3$, bestehend aus Eigenvektoren von $A$.

**Lösung:**

i) $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = 1$

ii) $S = \{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

## HS16 Probeprüfung Aufgabe 3

Betrachten Sie die Matrix $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

a) Finden Sie die Eigenwerte von $A$ sowie deren algebraische und geometrische Multiplizitäten.

b) Gibt es eine Basis von $\mathbb{R}^3$, die aus Eigenvektoren von $A$ besteht? Begründen Sie ihre Antwort.

c) Ist $A$ invertierbar? Wenn ja, bestimmen Sie die Inverse.

**Lösung:**

a) EW: $1, 2, -1$ jeweils mit algebr. und geometr. Multipl. 1

b) Ja, da $A$ symmetrisch ($\rightarrow$ algebr. $=$ geom. Vielfachheit $\forall$ EW)

c) Ja ($\det A = -2 \neq 0$), $A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

## HS15 Uebungen Serie 9 Aufgabe 3

i) Bestimme die Eigenwerte und dazugehörigen Eigenvektoren von $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

Finde eine Basis $[v] = [v^{(1)}, v^{(2)}]$ von $\mathbb{C}^2$ so dass $(T_A)_{[v]\rightarrow[v]}$ eine Diagonalmatrix ist.

**Lösung:**

i) $1 \pm 2i \quad [v] = [(i, 1)^T, (-i, 1)^T]$

MathCourses
www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Prüfe ob / Zeige dass

**Eigenwerte (EW) berechen:**

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

oder $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ (gibt dasselbe)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \ldots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$

$a_i$ ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert $\lambda_i$



**Kubische Gleichung lösen:**

- 1 Nullstelle erraten
- Polynomdivision $\Rightarrow$ restl. NS via "Mitternachtsformel"
  https://www.youtube.com/watch?v=K8K4_gowb4E

Beispiel **"verstecke Quadr. Gl.:"**

$ax^6 + bx^3 + c = 0$

$z = x^3$ substituieren $\Rightarrow$ $az^2 + bz + c = 0$



**Eigenvektor (EV) $v$ zum EW $\lambda$:**

Erfüllt: $Av = \lambda v$ $(v \neq 0)$

Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

$(A - \lambda \cdot I_n)\, v = 0$ lösen (homogenes LGS)

(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$\dim(E_{\lambda_i})$ = **geometrische Multiplitzität** vom EW $\lambda_i$

und $1 \leq$ geom. Multipl. $\leq$ algebr. Multipl.



**Spektrum einer linearen Abbildung $f_A$:**

Lineare Abbildung $f_A : V \to W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte
inkl. algebr. Multiplizität!
(d.h. Mehrfachauflistung)

$\operatorname{spec}(A) = \{\lambda_1 = \ldots, \lambda_2 = \ldots,\ \ldots\ldots,\ \lambda_n = \ldots\}$



**Eine Matrix $A$ ist diagonalisierbar:**

Eine lineare Abbildung $f_A$ / Matrix $A$ ist diagonalisierbar, **falls es eine Basis** $[v] = [v_1, \ldots, v_n]$ **gibt bestehend aus Eigenvektoren von** $A$.

$\Longrightarrow A = SDS^{-1}$

mit $S = \begin{pmatrix} v_1 \ldots v_n \end{pmatrix}$

und Diagonalmatrix $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$
(Eigenwerte in der Diagonalen)

Hinweis: $S \mathrel{\hat{=}} Id_{[v]\to[e]}$, $D \mathrel{\hat{=}} f_{[v]\to[v]}$



**Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar!**

Falls $A$ **symmetrisch** ist (d.h. $A^T = A$) gilt:

- $A$ ist diagonalisierbar
- Die Eigenvektoren von $A$ bilden eine **Orthonormalbasis**
  $\to S^{-1} = S^T$,
  da $S = \begin{pmatrix} v_1 \ldots v_n \end{pmatrix}$ eine *orthogonale Matrix* ist

$\Rightarrow A = SDS^T$ (mit $D = f_{[v]\to[v]}$)

Hinweis: symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte



**Orthogonale (= unitäre) Matrix:**

**Matrix** $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ **ist orthogonal** $\Longleftrightarrow A^T = A^{-1}$

prüfe: $A^T A = \mathrm{Id}_n = AA^T$ $\Rightarrow$ $\det(A) \in \{-1, 1\}$

$A$ orthogonale Matrix $\Leftrightarrow$ Spaltenvektoren bilden eine ONB

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist **unitär** $\Longleftrightarrow \overline{A}^T = A^{-1}$,

d.h. $\overline{A}^T A = \mathrm{Id} = A\overline{A}^T \Longleftrightarrow$ Vektoren bilden ONB



**Orthogonale (= unitäre) Matrix überpüfen:**

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal, falls: $A^T A = \mathrm{Id}$

oder Spaltenvektoren $a_1 \ldots a_n$ eine orthonormale Basis (ONB) bilden:

- orthogonal: $\langle a_i, a_j \rangle = 0$ $\quad 1 \leq i \neq j \leq n$
- Länge 1: $||\ a_i\ || = \sqrt{\langle a_i, a_i \rangle} = 1$ $\quad 1 \leq i \leq n$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist unitär, falls $\overline{A}^T A = \mathrm{Id}$ oder Vektoren = ONB

Aufpassen im komplexen! $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot \overline{w_1} + \ldots + v_n \cdot \overline{w_n}$

$<(1+i),(1+i)> = (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$

**symmetrisch / hermitisch:**

$A$ ist symmetrisch, falls gilt: $A^T = A$

$A$ ist hermitisch, falls gilt: $\overline{A}^T = A$

$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq A$

$B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq B, \quad \overline{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = B$

$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C}^T = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = C$

A symmetrisch, B hermitisch, C symmetrisch und hermitisch



**Quadratische Form:**

$Q(x) = \sum_{1 \leq i,j \leq n} a_{ij} x_i x_j \overset{\text{Bsp}}{=} a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$

Kann mit dem (normalen) Skalarprodukt geschrieben werden als:

$Q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle$ mit $A$ symmetrisch

Beispiel: $Q(x) = 3x_1^2 + 5x_1 x_2 + 8x_2^2$

$\rightarrow Q(x) = \langle Ax, x \rangle = (x_1 \;\; x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$



**positive-, negativ- und indefinit:**

Eine symmetrische Matrix $A$ ist:

- positiv definit, falls alle EW $\lambda_i > 0$ (d.h. $Q(x) > 0 \; \forall x$)
- positiv semidefinit falls alle $\lambda_i \geq 0$ (d.h. $Q(x) \geq 0 \; \forall x$)
- negativ definit, falls alle EW $\lambda_i < 0$ (d.h. $Q(x) < 0 \; \forall x$)
- negativ semidefinit falls alle $\lambda_i \leq 0$ (d.h. $Q(x) \leq 0 \; \forall x$)
- indefinit, falls $A$ sowohl pos. wie auch neg. $\lambda_i$ hat

**Alternativ: via** (Determinanten der) **Hauptminoren**



**Hauptminoren** zur Bestimmung der Definitheit

Eine symmetrische Matrix $A$ ist:

positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren $\det(A^{(k)}) > 0 \quad 1 \leq k \leq n$

negativ definit $\Leftrightarrow$ $\det(A^{(k)}) < 0$ für alle $k$ ungerade

$\det(A^{(k)}) > 0$ für alle $k$ gerade

Bsp. $A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$ $\quad A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad A^{(3)} = A$



**Inneres Produkt (= Skalarprodukt) prüfen:**

allg. Formeln siehe Lernkärtchen Basis 4

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(IP1) symmetrisch: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(IP2) bilinear: $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$

$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$

(IP3) positiv definit: $\langle v, v \rangle \geq 0$

und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$



**Inneres Produkt eines komplexen VR prüfen:**

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

(IP1)$_{\mathbb{C}}$ hermitisch: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad \forall v, w \in V$

(IP2)$_{\mathbb{C}}$ linear im ersten Argument: $\forall v, w, u \in V, \; \alpha, \beta \in \mathbb{C}$ :

$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle$

(IP3)$_{\mathbb{C}}$ positiv definit: $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Aufpassen bei komplexem Skalarprodukt:
zweites Argument / Faktor ist immer komplex konjugiert!



**Überprüfen ob eine Funktion linear ist:**

Eine Funktion mit Abbildungsmatrix $T$ ist linear, falls gilt:

$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g)$ $\quad f(0) = 0$ !!!

**Untervektorraum (subspace) prüfen:** (→ Video)

$W$ ist ein Untervektorraum, falls

- $0 \in W$ $\quad (0 \notin W \rightarrow$ Gegenbeispiel dass $W$ kein UVR ist)
- $\lambda \cdot a + b \in W \quad \forall a, b \in W, \lambda \in \mathbb{K}$ $\quad (\mathbb{K} = \mathbb{R}$ oder $\mathbb{C})$



**Vektorraum zeigen / prüfen:**

Ein Vektorraum ist eine nichtleere Menge $V$ mit Addition $\oplus$ und Multiplikation $\odot$ für die gilt: $\forall a, b, c \in V, \quad \lambda, \mu \in \mathbb{K}$:

- $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ ($\oplus$ assoziativ)
- $a \oplus b = b \oplus a$ ($\oplus$ kommutativ)
- **Nullelement**: $\exists \, 0 \in V$ so dass $\forall a \in V \quad 0 \oplus a = a \oplus 0 = a$
- Inverses: $\forall a \in V$ existiert ein $b \in V$: $\quad a \oplus b = 0 \quad \rightarrow b = (-a)$
- $\lambda \odot (\mu \odot a) = (\lambda \odot \mu) \odot a$ ($\odot$ assoziativ)
- $1 \odot a = a$ (neutrales Element der Multipl.)
- $\lambda \odot (a \oplus b) = \lambda \odot a \oplus \lambda \odot b$ (beide Distributivgesetze gelten)
- $(\lambda \oplus \mu) \odot a = \lambda \odot a \oplus \mu \odot a$

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Übungsblock

# Prüfe ob / Zeige dass

# Prüfe ob / Zeige dass

Vorzeigeaufgaben:

Bestimme für die folgenden quadratischen Formen $Q$ die symmetrische Matrix, so dass $Q(x) = \langle x, Ax \rangle \; \forall x \in \mathbb{R}^2$.

$Q(x, y) = 2(x+y)^2 - 2xy$. Ist die Quadratische Form positiv (semi)definit, negativ (semi)definit, oder indefinit?

Vorzeigeaufgabe:

Gegeben sei die Abbildung $T : \mathbb{R}_4[x] \to \mathbb{R}_4[x]$ mit $\quad T(f) := f'' - 2f' + 3f^{(iv)} \cdot x \quad$ für $f \in \mathbb{R}_4[x]$.

Zeigen Sie, dass $T$ eine lineare Abbildung ist.

**HS15 Uebungen Serie 7 Aufgabe 2** Sei $P_n$ der $\mathbb{R}$-Vektorraum aller Polynome in einer Variablen mit reellen Koeffizienten vom Grade höchstens $n$. Entscheide ob folgende Abbildungen linear sind.

i) $T : P_7 \to P_7, \quad p(t) \mapsto 2p''(t) + 2p'(t) + 5p(t)$. ii) $S : P_7 \to P_7, \quad p(t) \mapsto t^2 p''(t) + p(t)$.

**Lösung:** i) ja, $T$ ist linear ii) Ja, $S$ ist linear

**MAT141 HS16 Serie 11 Aufgabe 2 (abgeändert):**

Entscheide, ob folgende Quadratische Form positiv definit, negativ definit, oder indefinit ist:

(a) $Q(x, y) = (x+y)^2 + 4xy$ (b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ (d) $Q(x, y, z) = x^2 + 2xy - 4xz + z^2 - 2y^2 + 2yz$

**Lösung:**

(a) $\lambda_1 = -2 < 0,\; \lambda_2 = 4 > 0 \to$ indefinit

(b) $\lambda_1 = 1 > 0,\; \lambda_2 = 0 \to$ positiv semi-definit

(d) $\lambda_1 = 0,\; \lambda_2 = -3 < 0,\; \lambda_3 = 3 > 0 \to$ indefinit

**MAT141 HS18 Serie 13 Aufgabe 3:**

Bestimme für folgende Matrizen, ob diese symmetrisch, orthogonal, hermitisch oder unitär sind.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2i \\ -2i & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

**Lösung:** $A$: nur hermitisch, $B$: symmetrisch, hermitisch, orthogonal und unitär

$C$: orthogonal und unitär $D$: symmetrisch und unitär

**MAT141 HS17 Serie 8 Aufgabe 4:**

Let $B : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ the map given by $B(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$.

1. Show that $B$ is an inner product for $\mathbb{R}^2$.

3. Compute the norm of the vectors $w^{(1)} = (1, 1)^T$ and $w^{(2)} = (1, -1)^T$ with respect to $B$.

**Lösung:** 1. zeige $B(y, x) = B(x, y)$, $B(ax + bz, y) = aB(x, y) + bB(z, y)$, $B(x, x, ) \geq 0$ $(= 0 \to x = 0)$

2. $||w^{(1)}||_B = \sqrt{6}, ||w^{(2)}||_B = \sqrt{2}$

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# DGL-Systeme

**DGL-System $y' = Ay$ lösen:**

- EW $\lambda_1, \lambda_2$ und zugehörige EV $v_1, v_2$ von $A$ berechnen

- allgemeine Lösung:

  $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- **Falls Anfangswertproblem:**

  Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach $C_1, C_2$ auflösen



**Spezialfall:** **Falls $A$ eine Nullzeile hat!**

- $A^2, A^3$, etc. berechnen bis $A^n$ = Nullmatrix
- Allg. Lösung von $y' = Ay \quad \rightarrow \quad \underline{y(t) = e^{At} y_0}$
- benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j \qquad y_0 = (a_0, b_0)^T = y(0)$

$$\Rightarrow y(t) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!}(A \cdot t)^j \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \ldots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$



**Lineare DGL mit Anfangswert lösen:**

$\dot{x} = a \cdot x$ mit Anfangswert $x(t_0) = c$

hat Lösung: $x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t - t_0)}$

- Beispiel: $\dot{x} = 2x$ mit Anfangswert $x(1) = (4 + i)$

$\Rightarrow$ Lösung $x(t) = (4 + i) \cdot e^{2(t-1)}$



**Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:**

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und $v_1$ zu $\lambda_1$ ausrechnen
- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v_1$
- Euler's Formel anwenden: $e^{\pm i \cdot bt} = \big(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt)\big)$
- $\big(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt)\ \big) \cdot v_1$ ausmultiplizieren
- sortieren zu 2 Vektoren: ( Realteil ) $+ i \cdot$ ( Imaginärteil )

$\Rightarrow$ Lösung: $y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at}\,(\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at}\,(\text{Imaginärteil})}$



**Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$

- $\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1 \qquad (a = 0, b = 1)$
- $\begin{pmatrix} 1 - i & -1 \\ 2 & -1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$
- $e^{(0 + i \cdot 1)t} \cdot v_1 = e^{0 \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = e^{i \cdot t} \cdot v_1$



**Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:**

- $e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \big(\cos(t) + i \cdot \sin(t)\big) \cdot v_1$
- $\big(\cos(t) + i \cdot \sin(t)\big) \cdot \binom{1}{1-i}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

- sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$



**Formel als Alternative zum sortieren:**

$\underline{e^{at} \cdot \text{Realteil}} = \frac{1}{2}\left(e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2\right)$

$\underline{e^{at} \cdot \text{Imaginärteil}} = \frac{1}{2i}\left(e^{\lambda_1 t} v_1 - e^{\lambda_2 t} v_2\right)$

- $\lambda_1 = a + i \cdot b \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - i \cdot b$
- $v_1$ zu $\lambda_1$ ausrechnen $\Rightarrow v_2 = \overline{v_1}$
- dabei $e^{\lambda_1 t} = e^{at} \cdot e^{ibt}, \quad e^{\lambda_2 t} = e^{at} \cdot e^{-ibt}$ und

  Euler's formula $e^{\pm i \cdot b \cdot t} = \big(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt)\big)$ anwenden

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at}\,(\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at}\,(\text{Imaginärteil})} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$



**DGL höherer Ordnung via $\mathbf{y' = Ay}$:**

Homogene DGL: x” = ax + bx’

Betrachte $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$

lösen wie bei DGL-Systeme 1

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Übungsblock

# DGL-Systeme

# Differentialgleichungssysteme

**Vorzeigeaufgabe:** Lösen Sie folgendes Anfangswertproblem:

$$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2, \qquad & y_1(0) &= 2, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2, & y_2(0) &= -1. \end{aligned}$$

**HS15 Uebungen Serie 12 Aufgabe 1** Finde die allgemeine Lösung des Differentialgleichungssystems

a) $$\begin{aligned} y_1' &= y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 + 4y_2 \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 3y_2 \end{aligned}$$

**Lösung:**

a) $y(t) = a \cdot e^{2t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot e^{3t} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$

b) $y(t) = a \cdot e^{-2t} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} + b \cdot e^{t} \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}$

**HS15 Uebungen Serie 12 Aufgabe 2** Löse die folgenden Anfangswertprobleme.

a) $$\begin{aligned} y_1' &= -y_1 + 2y_2, \qquad & y_1(0) &= 2, \\ y_2' &= 2y_1 - y_2, & y_2(0) &= -1. \end{aligned}$$

b) $$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 6y_3, \qquad & y_1(0) &= 1, \\ y_2' &= y_1 - 3y_3, & y_2(0) &= 0 \\ y_3' &= y_2 - 2y_3, & y_3(0) &= -1. \end{aligned}$$

**Lösung:**

a) $\begin{pmatrix} \frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{t} \\ -\frac{3}{2}e^{-3t} + \frac{1}{2}e^{t} \end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix} 6e^{t} - 2e^{-t} - 3 \\ 3e^{t} - e^{-t} - 2 \\ e^{t} - e^{-t} - 1 \end{pmatrix}$

**Vorzeigeaufgabe:** Betrachte die ODE

$$y'(t) = Ay(t) \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Bestimmen Sie die allgemeine Lösung von $y'(t) = Ay(t)$.

**HS21 Uebungen Sheet 13 Exercise 2**

Consider the linear ODE

$$y'(t) = Ay(t) \qquad \text{mit} \qquad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{3\times 3}.$$

Determine the general solution $y'(t) = Ay(t)$.

**Lösung:** $\begin{bmatrix} 0 & t & \frac{t^2}{2} \\ 0 & 1 & t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c1 + c_2 \cdot t + c_2 \cdot \frac{t^2}{2} \\ c_2 + c_3 \cdot t \\ c_3 \end{pmatrix}$

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

# Komplexe DGL-Systeme

(Euler's formula)

**DGL-System $y' = Ay$ lösen:**

- EW $\lambda_1, \lambda_2$ und zugehörige EV $v_1, v_2$ von $A$ berechnen
- allgemeine Lösung:

  $y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot v_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot v_2 \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

- **Falls Anfangswertproblem:**

  Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach $C_1, C_2$ auflösen



**Spezialfall: Falls $A$ eine Nullzeile hat!**

- $A^2, A^3$, etc. berechnen bis $A^n =$ Nullmatrix
- Allg. Lösung von $y' = Ay \quad \rightarrow \quad \underline{y(t) = e^{At} y_0}$
- benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j \qquad y_0 = (a_0, b_0)^T = y(0)$

$$\Rightarrow y(t) = \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$

$$= \left( Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \ldots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix}$$



**Lineare DGL mit Anfangswert lösen:**

$\dot{x} = a \cdot x \quad$ mit Anfangswert $\quad x(t_0) = c$

hat Lösung: $x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t - t_0)}$

- Beispiel: $\qquad \dot{x} = 2x \quad$ mit Anfangswert $\quad x(1) = (4 + i)$

$\Rightarrow$ Lösung $x(t) = (4 + i) \cdot e^{2(t-1)}$



**Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:**

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und $v_1$ zu $\lambda_1$ ausrechnen
- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v_1$
- Euler's Formel anwenden: $e^{\pm i \cdot bt} = \big( \cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt) \big)$
- $\big( \cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt) \ \big) \cdot v_1$ ausmultiplizieren
- sortieren zu 2 Vektoren: $(\text{ Realteil }) + i \cdot (\text{ Imaginärteil })$

$\Rightarrow$ Lösung: $y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at} (\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at} (\text{Imaginärteil})}$



**Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:**

$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$

- $\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1 \qquad (a = 0, b = 1)$
- $\begin{pmatrix} 1 - i & -1 \\ 2 & -1 - i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} +1 \\ 1 - i \end{pmatrix}$
- $e^{(0 + i \cdot 1)t} \cdot v_1 = e^{0 \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = e^{i \cdot t} \cdot v_1$



**Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:**

- $e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \big( \cos(t) + i \cdot \sin(t) \big) \cdot v_1$
- $\big( \cos(t) + i \cdot \sin(t) \big) \cdot \binom{1}{1-i}$

$$= \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

- sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$



**Formel als Alternative zum sortieren:**

$\underline{e^{at} \cdot \text{ Realteil}} = \frac{1}{2} \left( e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2 \right)$

$\underline{e^{at} \cdot \text{ Imaginärteil}} = \frac{1}{2i} \left( e^{\lambda_1 t} v_1 - e^{\lambda_2 t} v_2 \right)$

- $\lambda_1 = a + i \cdot b \quad \Rightarrow \quad \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - i \cdot b$
- $v_1$ zu $\lambda_1$ ausrechnen $\Rightarrow v_2 = \overline{v_1}$
- dabei $\qquad e^{\lambda_1 t} = e^{at} \cdot e^{ibt}, \quad e^{\lambda_2 t} = e^{at} \cdot e^{-ibt} \qquad$ und

  Euler's formula $e^{\pm i \cdot b \cdot t} = \big( \cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt) \big)$ anwenden

$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at} (\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at} (\text{Imaginärteil})} \ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$



**DGL höherer Ordnung via y' = Ay:**

Homogene DGL: x" = ax + bx'

Betrachte $y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$

$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$

lösen wie bei DGL-Systeme 1

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat141.html

MAT141 PVK

**Fragen / Wünsche?**

# MAT141 PVK

Playlist Zusatz-Video

Prüfe ob / Zeige dass...

**Untervektorraum (subspace)**

Homepage / Webseite:

`www.mathcourses.ch/mat141.html`