



MAT141 PVK

”Lineare Algebra”

Lernkärtchen

(HS24)

Wichtige Zusammenhänge:

Für eine quadratische $[n \times n]$ Matrix A gilt:

$$\det(A) \neq 0$$

$\Leftrightarrow A$ ist invertierbar

$\Leftrightarrow A$ ist regulär $\Leftrightarrow r(A) = n$ $r(A) \hat{=}$ Anz. linear unabh. Vektoren

$\Leftrightarrow$ Zeilen- und Spaltenvektoren von A
sind linear unabhängig

Det 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Einige Rechenregeln für Determinanten:

Für quadratische $[n \times n]$ Matrizen A, A^{-1}, B gilt:

$$\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B) \rightarrow \det(A^m) = \left(\det(A)\right)^m$$

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \quad \det(A^T) = \det(A)$$

$$A \text{ eine } [n \times n] \text{ Matrix} \rightarrow \det(\lambda A) = \lambda^n \cdot \det(A)$$

Det 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Determinante einer 2x2 Matrix

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ definieren wir

$$\det A = a \cdot d - c \cdot b$$

Beispiel

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 3 \cdot 1 - (-1) \cdot 4 = 3 + 4 = 7$$

Det 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Determinante einer 3x3 Matrix

Regel von Sarrus:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 + 2 + 0 - 0 - 0 - (-4) = 6$$

Det 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Determinante mit Entwicklungssatz von Laplace:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n a_{ij} \cdot (-1)^{i+j} \cdot \det(A_{ij})$$

• Beispiel: Entwicklungssatz von Laplace:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & -5 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ -5 & -2 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} + 0 + 0 + 2 \cdot (-1)^{4+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \\ -5 & -2 \end{vmatrix}$$
$$= 1 \cdot (2) - 2 \cdot (-2) = 6$$

Det 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Inverse einer Matrix berechnen:

Inverse einer 2x2 Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \cdot \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Inverse einer $n \times n$ Matrix:

$$(A \mid I_n) \text{ umformen zu } (I_n \mid A^{-1})$$

Det 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Gauss-Umformungen und Determinante:

• Vielfaches einer Zeile zu einer anderen Zeile addieren:

→ Determinante bleibt gleich
(analog bei Spalten)

• Vertauschen zweier Zeilen:

→ Determinante ändert das Vorzeichen!

• Multiplizieren einer Zeile mit λ :

→ Determinante wird $\cdot \lambda$ vergrößert!

Det 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel LGS lösen: 1. Erweiterte Matrix

Gleichungssystem:

$$\begin{array}{rcl} \overbrace{A \cdot x} & = & b \\ \begin{array}{rcl} x_1 & - & x_2 & = & 1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\ & - & 3x_2 & + & 9x_3 & = & 0 \end{array} \end{array}$$
$$\Rightarrow \text{erweiterte Matrix } (A|b): \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array} \right)$$

LGS 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: 2. Zeilenstufenform + 3. Gl. lösen:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 3 & 5 \\ 0 & -3 & 9 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{Z2 - 2 \cdot Z1} \\ \boxed{Z3 : (-3)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{Z2 \leftrightarrow Z3} \\ \boxed{Z3 + Z2} \end{array}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \end{array} \right) \begin{array}{l} \boxed{Z1 + Z2} \\ \boxed{Z2 \leftrightarrow Z3} \\ \boxed{Z3 : (-3)} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right) \Rightarrow \begin{array}{l} x_1 = 4 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 1 \end{array}$$

$r(A)=3$ "pivots"

$$\Rightarrow L = \{(4, 3, 1)\} \quad \text{mit } \dim(L) = n - r = 3 - 3 = 0$$

LGS 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge eines LGS

$\dim L = n - r =$ "Anzahl Variablen - Anzahl pivots"
 $\hat{=}$ Anzahl frei wählbarer Parameter

LGS $Ax = b$ hat

- hat genau eine Lösung falls $r(A) = n \rightarrow \dim(L) = 0$
- hat unendlich viele Lösungen falls $r(A) < n \rightarrow \dim(L) > 0$
- hat keine Lösung falls das LGS eine Zeile hat
 $0 \ 0 \ 0 \mid \neq 0$

LGS 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: Anzahl Lösungen eines LGS

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 11 \\ 0 & 1 & 0 & -4 \\ 0 & 0 & u & v \end{array} \right)$$

- hat genau eine Lösung, falls $u \neq 0, v \in \mathbb{R}$
- hat keine Lösung, falls $u = 0$ und $v \neq 0$
- hat unendlich viele Lösungen, falls $u = 0$ und $v = 0$

LGS 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle

$\dim(L) = n - r(A)$ $L =$ Lösungsmenge eines LGS $Ax=b$

- **Fall 1:** $\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow A$ ist regulär

$$\det(A) \neq 0 \Leftrightarrow r(A) = n$$

$$\dim(L) = n - n = 0$$

(geometrische Interpretation: $L \hat{=}$ Punkt)

$\Rightarrow L$ hat genau 1 Lösung

LGS 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension der Lösungsmenge: 3 Fälle (Forts.)

- **Fall 2:** $\det(A) = 0$ und LGS unlösbar!

Das LGS hat eine Zeile: $0 \ 0 \ 0 \mid \neq 0$

$\Rightarrow L$ hat keine Lösung

- **Fall 3:** $\det(A) = 0$ und LGS lösbar $r(A) < n$

$$\dim(L) = n - r(A) > 0$$

$$\dim(L) = 1 \rightarrow L \hat{=} \text{Gerade} \quad \dim(L) = 2 \rightarrow L \hat{=} \text{Ebene}$$

$\Rightarrow L$ hat unendlich viele Lösungen

LGS 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Cramersche Regel (um LGS zu lösen):

Ist A eine reguläre $[n \times n]$ Matrix, so hat das LGS $Ax = b$ eindeutige Lösungen $\hat{x} = (\hat{x}_1, \dots, \hat{x}_n)$ mit

$$\hat{x}_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)}$$

A_i : i -te Spalte von A durch b ersetzen

LGS 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel Cramersche Regel:

$$\text{LGS } (A|b) = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow \hat{x}_1 = \frac{\det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}}{3 \cdot 1 - 0 \cdot 1} = \frac{3}{3} = 1$$

$$\Rightarrow \hat{x}_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{3} = \frac{6}{3} = 2$$

LGS 8

www.mathcourses.ch/mat141.html

Basis

Vektorraum mit $\dim(V) = n$.

Eine Basis besteht aus

- genau n linear unabhängigen Vektoren

$$\text{d.h. } \det(v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n) \neq 0$$

Basis 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Unabhängigkeit:

$v_1, \dots, v_k$ sind linear unabhängig, falls

$$\underbrace{\lambda_1 \cdot v_1 + \dots + \lambda_k \cdot v_k = 0}_{\text{LGS}} \stackrel{!}{\Rightarrow} \lambda_1 = \dots = \lambda_k = 0$$

$$\text{LGS } A\lambda = 0 \quad (\Rightarrow \text{kern}(A) = 0)$$

Linear abh.: falls das LGS unendlich viele Lösungen hat

Lineare Unabhängigkeit überprüfen:

$$- n \text{ Vektoren } \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \det(v_1 \ \dots \ v_n) \neq 0$$

- sonst LGS lösen oder von Auge vergleichen (bei 2 Vektoren)

Basis 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Basis (des $\mathbb{R}^n$):

- 1) n linear unabhängige Vektoren $v_1, \dots, v_n$ ($\in \mathbb{R}^n$)

orthogonale Basis:

- 1) n linear unabhängige Vektoren
- 2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt = 0)

orthonormale Basis (ONB):

- 1) n linear unabhängige Vektoren
- 2) $v_1, \dots, v_n$ sind paarweise orthogonal (Skalarprodukt = 0)
- 3) alle Vektoren haben Länge 1 (= normiert)

Basis 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Euklidisches Skalarprodukt = inneres Produkt $\langle \cdot, \cdot \rangle$:

$$\langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot w_i \quad \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n v_i \cdot \overline{w_i} \quad (v, w \in \mathbb{C})$$

allgemein gilt für ein Skalarprodukt $\langle \cdot, \cdot \rangle$ (= inneres Produkt):

- v und w sind orthogonal $\Leftrightarrow \langle v, w \rangle = 0$

- Länge von $v = \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$ normiert: $\frac{v}{\|v\|}$

- $\cos(\varphi) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \|w\|}$ (Winkel $0 \leq \varphi \leq \pi$ zwischen v und w)

Basis 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Orthogonalisierungsverfahren von Gram-Schmidt:

Basis $v_1, \dots, v_n$ gegeben, ist aber nicht orthogonal:

$$w_1 = v_1$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle w_1, v_2 \rangle}{\langle w_1, w_1 \rangle} w_1$$

$\vdots$

$$w_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle w_i, v_j \rangle}{\langle w_i, w_i \rangle} w_i \quad \text{für } j = 2, \dots, n$$

$$\text{Vektoren normieren: } w_i \cdot \frac{1}{\|w_i\|} \rightarrow \text{ONB}$$

Basis 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel aus alten Übungen:

$$\{v_1, v_2\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\},$$

To find an orthonormal basis of this eigenspace, we set

$$w_1 = 1/\sqrt{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

and find w_2' such that $w_2' = v_1 + \lambda v_2$ and $\langle v_1, w_2' \rangle = 0$. This gives us

$$0 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\rangle = 1 + \lambda - (-1) = 2 + \lambda, \text{ so } \lambda = -2$$

and $w_2' = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$. We normalise this vector and get

$$w_2 = 1/\sqrt{6} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

Basis 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Basiswechsel / Basiswechselmatrix:

Koordinaten eines Vektors sind (bis jetzt immer) gegeben für Standardbasis $[e]$ (=Einheitsvektoren)

$$\text{im } \mathbb{R}^3: [e] = [(1, 0, 0)^T, (0, 1, 0)^T, (0, 0, 1)^T]$$

Neue Basis $[v] = [v_1, v_2, \dots, v_n]$ gegeben

$\rightarrow$ Koordinaten desselben Vektors für neue Basis $[v]$ berechnen(!)

via **Basiswechselmatrix:** $Id_{[\text{von alter Basis}] \rightarrow [\text{zu neuer Basis}]}$

- $Id_{[v] \rightarrow [e]} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)$ (Matrix bestehend aus neuen Basisvektoren)

Basiswechsel 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Vektor in neuer Basis $[v]$ darstellen:

Koordinaten von w gegeben (für Standardbasis $[e]$)

w' = Koordinaten von w für neue Basis $[v]$:

- 1) $Id_{[v] \rightarrow [e]}$ invertieren (für andere Richtung)

$$\rightarrow Id_{[e] \rightarrow [v]} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} = (v_1 \ v_2 \ \dots \ v_n)^{-1}$$

Falls $[v]$ eine ONB ist: $(Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^T$

- 2) Koordinaten w' für neue Basis $[v]$ berechnen

$$Id_{[e] \rightarrow [v]} \cdot w_{[e]} = w'_{[v]} = w'$$

Basiswechsel 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Abbildungsmatrix (für Standardbasis [e]) aufstellen:

Abbildungsvorschrift $T : (x_1, \dots, x_n)^T \mapsto f(x_1, \dots, x_n)$

(ist in der Aufgabenstellung) vorgegeben:

$$\left(\underbrace{\text{Abbildungsmatrix}}_{T_{[e] \rightarrow [e]}} \right) \cdot (\text{urspr. Vektor}) = (\text{neuer Vektor})$$

$$\left(\begin{array}{c} \text{ablesen / ergänzen} \end{array} \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\text{gegeben}) \\ (\text{gegeben}) \\ (\text{gegeben}) \\ (\text{gegeben}) \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

(Vorzeige-)Aufgaben dazu auf Homepage!

Abbildungsmatrix für Polynom-Vektorraum $\mathbb{P}_n$:

Standard-Basis für $\mathbb{P}_n$: $\begin{pmatrix} x^n \\ 0 \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ x^{n-1} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ x \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

1) Vektor f & Bildvektor $T(f)$ in geg. Basis ausdrücken

2) Abbildungsmatrix via Matrizenmultiplikation aufstellen:

$$T \cdot f = T(f)$$

Lineare Abbildung 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Bild und Kern einer linearen Abbildung:

Lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$ (mit Abbildungsmatrix A)

$$\text{Bild}(f) = \text{range}(f) := \{f(x) \mid x \in V\} \subset W$$

$$\text{Kern}(f) = \text{kernel}(f) = \text{Null}(f) := \{x \in V \mid f(x) = 0\} \subset V$$

Hinweis: beide sind Untervektorräume(!) mit

$$\text{Dimension vom Bild} = r(A) \quad \text{Dimension vom Kern} = n - r(A)$$

$$\text{allg. gilt:} \quad \dim(\text{Bild}) + \dim(\text{Kern}) = n$$

Lineare Abbildung 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Abbildungsmatrix für andere Basen angeben:

Gegeben: Abbildungsmatrix ($= T_{[e] \rightarrow [e]}$)

$$T_{[v] \rightarrow [w]} = Id_{[e] \rightarrow [w]} \cdot T_{[e] \rightarrow [e]} \cdot Id_{[v] \rightarrow [e]}$$

$$\text{wobei } Id_{[v] \rightarrow [e]} = \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & \dots & v_n \end{pmatrix}$$

$$\text{und } Id_{[e] \rightarrow [v]} = (Id_{[v] \rightarrow [e]})^{-1} \text{ (invertieren)}$$

falls $[w]$ eine ONB ist gilt: $Id_{[e] \rightarrow [w]} = (Id_{[w] \rightarrow [e]})^T$

Lineare Abbildung 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel Abbildungsmatrix für $\mathbb{P}_n$:

$$f(z) = az^3 + bz^2 + cz + d \in \mathbb{P}_3$$

$$T : \mathbb{P}_3 \rightarrow \mathbb{P}_2, \quad T(f) = 3az^2 + 2bz + c$$

$$1) \text{ Koeff. für Standardbasis: } f(z) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \quad T(f) = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$$

$$2) \text{ Abb.matrix: } \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3a \\ 2b \\ c \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Dimension von C_A und Basis von C_A :

Lineare Abbildung $f : V \rightarrow W$

mit Abbildungsmatrix A

$$\bullet \dim(C_A) = \text{rank}(A) = r(A)$$

$\bullet$ Basis von C_A :

$r(A)$ linear unabhängige Spaltenvektoren von A

Lineare Abbildung 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Fundamentaler Satz der Algebra:

Jedes Polynom $p(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k$ vom Grad $n \geq 1$

mit komplexen Koeffizienten $a_0, a_1, \dots, a_n$

hat (**bei "Mehrfachzählung"*) immer n Nullstellen und

kann geschrieben werden in der Form: $p(z) = a_n \prod_{k=1}^n (z - z_k)$.

*Bsp.

$$p(z) = z^3 - 2z^2 + z = 1 \cdot (z-0) \cdot \underline{(z-1)} \cdot \underline{(z-1)} = z^1 \cdot (z-1)^2$$

Komplexe Zahlen 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Komplexe Zahlen:

- $i^2 = -1$

- Kartesische Koordinaten: $z = a + ib = \underbrace{a}_{\text{Re}(z)} + i \cdot \underbrace{b}_{\text{Im}(z)}$
(Normalform)

- Komplex konjugiertes: $\bar{z} = a - ib$

Hinweis: komplexe Lösungen sind immer paarweise konjugiert!

(d.h. quadr. Gleichung mit Lös. $x_1 = a + i \cdot b \rightarrow x_2 = a - i \cdot b$)

Komplexe Zahlen 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Gleichung lösen in Polarkoordinaten:

Gleichungen der Form:

$$w^n = a + ib \quad \text{oder} \quad w = \sqrt[n]{a + ib}$$

(kann rechts auch eine reelle Zahl sein $\rightarrow b = 0$)

In Polarform umschreiben! $\Rightarrow w = \sqrt[n]{r} e^{i \cdot \varphi}$

hat n Lösungen:

$$w_1, \dots, w_n = \sqrt[n]{r} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n} \cdot (k-1) \right)}, \quad k = 1, \dots, n$$

(siehe Beispiel rechts)

Komplexe Zahlen 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Bruch vereinfachen zu Komplexer Zahl:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \overline{z_2}}{z_2 \cdot \overline{z_2}}$$

Beispiel: $z_1 = 3 + 5i, \quad z_2 = 4 + 2i$

$$= \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{(4+2i) \cdot (4-2i)} = \frac{(3+5i) \cdot (4-2i)}{4^2 + 2^2} = \frac{(3 \cdot 4 + \overbrace{5 \cdot (-2)}^{-10}) + i \cdot (5 \cdot 4 - 3 \cdot 2)}{20}$$

$$= \frac{22 + i \cdot (14)}{20} = \frac{22}{20} + i \frac{14}{20} = 1.1 + 0.7i$$

Komplexe Zahlen 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

Bsp. quadratische Gleichung:

$$p(z) = z^2 - 2z + 2$$

hat Grad $n = 2$ und somit in $\mathbb{C}$ genau 2 Nullstellen*:

Mitternachtsformel: $a = 1, \quad b = -2, \quad c = 2$:

$$\frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 8}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{4i^2}}{2} = \frac{2 \pm 2i}{2}$$

$$\rightarrow z_1 = \frac{2+2i}{2} = 1 + i$$

$$\Rightarrow \text{komplex konjugierte Lösung } z_2 = \overline{z_1} = \overline{1+i} = 1 - i$$

Komplexe Zahlen 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Polarkoordinaten ($\longleftrightarrow$ kartesischen Koordinaten):

Polarkoordinaten: $z = r e^{i \cdot \varphi}$ (kart. Koo.: $z = a + i \cdot b$)

$$r = |z| = \sqrt{(a)^2 + (b)^2}$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right) \quad (\arctan \text{ hat 2 Lösungen!!} \rightarrow \text{kontrolliere } a)$$

(oder φ graphisch bestimmen)

mit $\underline{a = r \cdot \cos(\varphi)} \quad b = r \cdot \sin(\varphi)$

Komplexe Zahlen 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel: Gleichung lösen in Polarkoordinaten

$$w^3 = 1 + i \quad \hat{=} \quad w = \sqrt[3]{1+i} \quad \text{hat 3 Lösungen!}$$

Polarkoordinaten von $1 + i = \sqrt{2} \cdot e^{i \cdot \pi/4}$

Formel: $w_1, \dots, w_3 = (\sqrt{2})^{\frac{1}{3}} e^{i \cdot \left(\frac{\pi/4}{3} + \frac{2\pi}{3} \cdot (k-1) \right)}, \quad k = 1, \dots, 3$

$$w_1 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 0 \right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} \right)},$$

$$w_2 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 1 \right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{9\pi}{12} \right)},$$

$$w_3 = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{\pi}{12} + \frac{8\pi}{12} \cdot 2 \right)} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{i \cdot \left(\frac{17\pi}{12} \right)}$$

Komplexe Zahlen 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Multiplikation / Division mit Polarkoordinaten:

$$z_1 = r_1 e^{i \cdot \varphi_1}, \quad z_2 = r_2 e^{i \cdot \varphi_2}$$

$$z_1 \cdot z_2 = (r_1 e^{i \cdot \varphi_1}) \cdot (r_2 e^{i \cdot \varphi_2}) = r_1 r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i \cdot (\varphi_1 - \varphi_2)} \quad z^n = (r \cdot e^{i \varphi})^n = r^n \cdot e^{i \cdot (n \cdot \varphi)}$$

Komplexe Zahlen 8

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eigenwerte (EW) berechnen:

Lösungen von $\det(A - \lambda \cdot I_n) = 0$

oder $\det(\lambda \cdot I_n - A) = 0$ (gibt dasselbe)

$p(\lambda) = \det(A - \lambda \cdot I_n)$ heisst charakteristisches Polynom

Eigenwerte = Nullstellen des char. Polynoms:

$$p(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{a_1} \cdot (\lambda - \lambda_2)^{a_2} \cdot \dots \cdot (\lambda - \lambda_n)^{a_n} = 0$$

a_i ist die **algebraische Multiplizität** vom Eigenwert λ_i

Eigenwerte 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Kubische Gleichung lösen:

- 1 Nullstelle erraten

- **Polynomdivision** $\Rightarrow$ restl. NS via "Mitternachtsformel"
https://www.youtube.com/watch?v=K8K4_gowb4E

Beispiel "versteckte Quadr. Gl.:"

$$ax^6 + bx^3 + c = 0$$

$$z = x^3 \text{ substituieren } \Rightarrow az^2 + bz + c = 0$$

Eigenwerte 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eigenvektor (EV) v zum EW λ :

$$\text{Erfüllt: } Av = \lambda v \quad (v \neq 0)$$

Eigenraum $E_\lambda(A)$ aller Eigenvektoren berechnen:

$$(A - \lambda \cdot I_n)v = 0 \text{ lösen (homogenes LGS)}$$

(Basis)Vektoren vom Eigenraum $E_\lambda(A)$ sind EV.

$\dim(E_{\lambda_i}) = \text{geometrische Multiplizität}$ vom EW λ_i

und $1 \leq \text{geom. Multipl.} \leq \text{algebr. Multipl.}$

Eigenwerte 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Spektrum einer linearen Abbildung f_A :

Lineare Abbildung $f_A : V \rightarrow W$

(mit Abbildungsmatrix $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$)

Spektrum = Menge aller Eigenwerte

inkl. algebr. Multiplizität!

(d.h. Mehrfachauflistung)

$$\text{spec}(A) = \{\lambda_1 = \dots, \lambda_2 = \dots, \dots, \lambda_n = \dots\}$$

Eigenwerte 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Eine Matrix A ist diagonalisierbar:

Eine lineare Abbildung f_A / Matrix A ist diagonalisierbar,

falls es eine Basis $[v] = [v_1, \dots, v_n]$ gibt

bestehend aus Eigenvektoren von A .

$$\Rightarrow A = SDS^{-1}$$

$$\text{mit } S = (v_1 \dots v_n)$$

und Diagonalmatrix $D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$

(Eigenwerte in der Diagonalen)

Hinweis: $S \hat{=} Id_{[v] \rightarrow [e]}$, $D \hat{=} f_{[v] \rightarrow [v]}$

Eigenwerte 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Symmetrische Matrizen sind diagonalisierbar!

Falls A **symmetrisch** ist (d.h. $A^T = A$) gilt:

- A ist diagonalisierbar

- Die Eigenvektoren von A bilden eine **Orthonormalbasis**

$$\rightarrow S^{-1} = S^T,$$

da $S = (v_1 \dots v_n)$ eine *orthogonale Matrix* ist

$$\Rightarrow A = SDS^T \quad (\text{mit } D = f_{[v] \rightarrow [v]})$$

Hinweis: symmetrische Matrizen haben nur reelle Eigenwerte

Eigenwerte 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Orthogonale (= unitäre) Matrix:

Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist **orthogonal** $\iff A^T = A^{-1}$

$$\text{prüfe: } A^T A = Id_n = AA^T \Rightarrow \det(A) \in \{-1, 1\}$$

A orthogonale Matrix $\iff$ Spaltenvektoren bilden eine ONB

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist **unitär** $\iff \overline{A}^T = A^{-1}$,

d.h. $\overline{A}^T A = Id = A \overline{A}^T \iff$ Vektoren bilden ONB

Prüfen 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Orthogonale (= unitäre) Matrix überprüfen:

$A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ist orthogonal, falls: $A^T A = Id$

oder Spaltenvektoren $a_1 \dots a_n$ eine orthonormale Basis (ONB) bilden:

- orthogonal: $\langle a_i, a_j \rangle = 0 \quad 1 \leq i \neq j \leq n$

- Länge 1: $\|a_i\| = \sqrt{\langle a_i, a_i \rangle} = 1 \quad 1 \leq i \leq n$

$A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ ist unitär, falls $\overline{A}^T A = Id$ oder Vektoren = ONB

Aufpassen im komplexen! $\langle v, w \rangle = v_1 \cdot \overline{w_1} + \dots + v_n \cdot \overline{w_n}$

$$< (1+i), (1+i) > = (1+i) \cdot \overline{(1+i)} = (1+i) \cdot (1-i) = 1 - i^2 = 1 + 1 = 2$$

Prüfen 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

symmetrisch / hermitisch:

A ist symmetrisch, falls gilt: $A^T = A$

A ist hermitisch, falls gilt: $\overline{A}^T = A$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow A^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix} = A, \quad \overline{A}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq A$$

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow B^T = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 0 \end{pmatrix} \neq B, \quad \overline{B}^T = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix} = B$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \overline{C}^T = C^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = C$$

A symmetrisch, B hermitisch, C symmetrisch und hermitisch

Prüfen 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Quadratische Form:

$$Q(x) = \sum_{1 \leq i, j \leq n} a_{ij} x_i x_j \stackrel{\text{Bsp}}{=} a_{11} x_1^2 + (a_{12} + a_{21}) x_1 x_2 + a_{22} x_2^2$$

Kann mit dem (normalen) Skalarprodukt geschrieben werden als:

$$Q_A(x) = \langle Ax, x \rangle = \langle x, Ax \rangle \quad \text{mit} \quad \underline{A \text{ symmetrisch}}$$

$$\text{Beispiel: } Q(x) = 3x_1^2 + 5x_1x_2 + 8x_2^2$$

$$\rightarrow Q(x) = \langle Ax, x \rangle = (x_1 \ x_2) \underbrace{\begin{pmatrix} 3 & 5/2 \\ 5/2 & 8 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

Prüfen 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

positive-, negativ- und indefinit:

Eine symmetrische Matrix A ist:

- positiv definit, falls alle EW $\lambda_i > 0$ (d.h. $Q(x) > 0 \ \forall x$)
- positiv semidefinit falls alle $\lambda_i \geq 0$ (d.h. $Q(x) \geq 0 \ \forall x$)
- negativ definit, falls alle EW $\lambda_i < 0$ (d.h. $Q(x) < 0 \ \forall x$)
- negativ semidefinit falls alle $\lambda_i \leq 0$ (d.h. $Q(x) \leq 0 \ \forall x$)
- indefinit, falls A sowohl pos. wie auch neg. λ_i hat

Alternativ: via (Determinanten der) **Hauptminoren**

Prüfen 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Hauptminoren zur Bestimmung der Definitheit

Eine symmetrische Matrix A ist:

positiv definit $\Leftrightarrow$ alle Hauptminoren $\det(A^{(k)}) > 0 \ 1 \leq k \leq n$

negativ definit $\Leftrightarrow \det(A^{(k)}) < 0$ für alle k ungerade
 $\det(A^{(k)}) > 0$ für alle k gerade

$$\text{Bsp. } A = \begin{pmatrix} \boxed{1} & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 6 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \quad A^{(1)} \quad A^{(2)} \quad A^{(3)} = A$$

Prüfen 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Inneres Produkt (= Skalarprodukt) prüfen:

allg. Formeln siehe Lernkärtchen Basis 4

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls $\forall u, v, w \in V, \lambda \in \mathbb{R}$ gilt:

(IP1) symmetrisch: $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$

(IP2) bilinear: $\langle v + w, u \rangle = \langle v, u \rangle + \langle w, u \rangle$

$$\langle \lambda v, w \rangle = \lambda \langle v, w \rangle$$

(IP3) positiv definit: $\langle v, v \rangle \geq 0$

$$\text{und } \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Zeigen 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Inneres Produkt eines komplexen VR prüfen:

$\langle \cdot, \cdot \rangle$ ist ein Inneres Produkt, falls für $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ gilt:

(IP1) $_{\mathbb{C}}$ hermitisch: $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}, \quad \forall v, w \in V$

(IP2) $_{\mathbb{C}}$ linear im ersten Argument: $\forall v, w, u \in V, \alpha, \beta \in \mathbb{C} :$

$$\langle \alpha v + \beta w, u \rangle = \alpha \langle v, u \rangle + \beta \langle w, u \rangle$$

(IP3) $_{\mathbb{C}}$ positiv definit: $\langle v, v \rangle \geq 0$ und $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$

Aufpassen bei komplexem Skalarprodukt:

zweites Argument / Faktor ist immer komplex konjugiert!

Zeigen 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Überprüfen ob eine Funktion linear ist:

Eine Funktion mit Abbildungsmatrix T ist linear, falls gilt:

$$T(\lambda f + g) = \lambda T(f) + T(g) \quad \text{f(0) = 0 !!!}$$

Untervektorraum (subspace) prüfen: ([→ Video](#))

W ist ein Untervektorraum, falls

• $0 \in W$ ($0 \notin W \rightarrow$ Gegenbeispiel dass W kein UVR ist)

• $\lambda \cdot a + b \in W \quad \forall a, b \in W, \lambda \in \mathbb{K} \quad (\mathbb{K} = \mathbb{R} \text{ oder } \mathbb{C})$

Zeigen 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Vektorraum zeigen / prüfen:

Ein Vektorraum ist eine nichtleere Menge V mit Addition $\oplus$

und Multiplikation $\odot$ für die gilt: $\forall a, b, c \in V, \lambda, \mu \in \mathbb{K} :$

• $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$ ($\oplus$ assoziativ)

• $a \oplus b = b \oplus a$ ($\oplus$ kommutativ)

• **Nullelement:** $\exists 0 \in V$ so dass $\forall a \in V \quad 0 \oplus a = a \oplus 0 = a$

• Inverses: $\forall a \in V$ existiert ein $b \in V: \quad a \oplus b = 0 \quad \rightarrow b = (-a)$

• $\lambda \odot (\mu \odot a) = (\lambda \odot \mu) \odot a$ ($\odot$ assoziativ)

• $1 \odot a = a$ (neutrales Element der Multipl.)

• $\lambda \odot (a \oplus b) = \lambda \odot a \oplus \lambda \odot b$ (beide Distributivgesetze gelten)

• $(\lambda \oplus \mu) \odot a = \lambda \odot a \oplus \mu \odot a$

Zeigen 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

DGL-System $y' = Ay$ lösen:

- EW λ_1, λ_2 und zugehörige EV v_1, v_2 von A berechnen

- allgemeine Lösung:

$$y(t) = C_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 + C_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot v_2 \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

- **Falls Anfangswertproblem:**

Anfangswerte einsetzen und Gl.sys. nach C_1, C_2 auflösen

DGL-Systeme 1

www.mathcourses.ch/mat141.html

Spezialfall: **Falls A eine Nullzeile hat!**

- A^2, A^3 , etc. berechnen bis $A^n = \text{Nullmatrix}$

- Allg. Lösung von $y' = Ay \rightarrow y(t) = e^{At} y_0$

- benutze $e^{At} =: \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j \quad y_0 = (a_0, b_0)^T = y(0)$

$$\begin{aligned} \Rightarrow y(t) &= \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} (A \cdot t)^j \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \\ &= \left(Id + \frac{A^1 \cdot t^1}{1!} + \dots + \frac{A^n \cdot t^n}{n!} \right) \cdot \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

DGL-Systeme 2

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare DGL mit Anfangswert lösen:

$$\dot{x} = a \cdot x \quad \text{mit Anfangswert } x(t_0) = c$$

$$\text{hat Lösung: } x(t) = c \cdot e^{a \cdot (t-t_0)}$$

- Beispiel: $\dot{x} = 2x$ mit Anfangswert $x(1) = (4+i)$

$$\Rightarrow \text{Lösung } x(t) = (4+i) \cdot e^{2(t-1)}$$

DGL-Systeme 3

www.mathcourses.ch/mat141.html

Falls DGL-System komplexe Eigenwerte hat:

- Nur $\lambda_1 = a + i \cdot b$ benutzen und v_1 zu λ_1 ausrechnen

- betrachte $e^{\lambda_1 t} \cdot v_1 = e^{at} \cdot e^{i \cdot bt} \cdot v_1$

- Euler's Formel anwenden: $e^{\pm i \cdot bt} = (\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt))$

- $(\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt)) \cdot v_1$ ausmultiplizieren

- **sortieren** zu 2 Vektoren: (Realteil) + $i \cdot$ (Imaginärteil)

$$\Rightarrow \text{Lösung: } y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at}(\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at}(\text{Imaginärteil})}$$

DGL-Systeme 4

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = 0 \pm i \cdot 1$$

- $\lambda_1 = i = 0 + i \cdot 1 \quad (a=0, b=1)$

$$\bullet \begin{pmatrix} \text{1-i} & \text{-1} \\ 2 & -1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow v_1 = \begin{pmatrix} \text{+1} \\ \text{1-i} \end{pmatrix}$$

$$\bullet e^{(0+i \cdot 1)t} \cdot v_1 = e^{0 \cdot t} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = \underbrace{e^0}_{=1} \cdot e^{i \cdot t} \cdot v_1 = e^{i \cdot t} \cdot v_1$$

DGL-Systeme 5

www.mathcourses.ch/mat141.html

Beispiel DGL-System mit komplexen Eigenwerten:

- $e^{i \cdot t} \cdot v_1 = (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot v_1$

$$\bullet (\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(t) + i \cdot \sin(t) \\ \cos(t) + i \cdot \sin(t) - i(\cos(t) + i \cdot \sin(t)) \end{pmatrix}$$

- sortiert: $\begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + i \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \cos(t) + \sin(t) \end{pmatrix} + C_2 \cdot \begin{pmatrix} \sin(t) \\ \sin(t) - \cos(t) \end{pmatrix}$$

DGL-Systeme 6

www.mathcourses.ch/mat141.html

Formel als Alternative zum **sortieren**:

$$\underline{e^{at} \cdot \text{Realteil}} = \frac{1}{2} (e^{\lambda_1 t} v_1 + e^{\lambda_2 t} v_2)$$

$$\underline{e^{at} \cdot \text{Imaginärteil}} = \frac{1}{2i} (e^{\lambda_1 t} v_1 - e^{\lambda_2 t} v_2)$$

- $\lambda_1 = a + i \cdot b \Rightarrow \lambda_2 = \overline{\lambda_1} = a - i \cdot b$

- v_1 zu λ_1 ausrechnen $\Rightarrow v_2 = \overline{v_1}$

- dabei $e^{\lambda_1 t} = e^{at} \cdot e^{ibt}$, $e^{\lambda_2 t} = e^{at} \cdot e^{-ibt}$ und Euler's formula $e^{\pm i \cdot b \cdot t} = (\cos(bt) \pm i \cdot \sin(bt))$ anwenden

$$\Rightarrow y(t) = C_1 \cdot \underline{e^{at}(\text{Realteil})} + C_2 \cdot \underline{e^{at}(\text{Imaginärteil})} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

DGL-Systeme 7

www.mathcourses.ch/mat141.html

DGL höherer Ordnung via $y' = Ay$:

Homogene DGL: $x'' = ax + bx'$

$$\text{Betrachte } y = \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow y' = \begin{pmatrix} x' \\ x'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ x' \end{pmatrix} = Ay$$

lösen wie bei DGL-Systeme 1

DGL-Systeme 8

www.mathcourses.ch/mat141.html

Zusätzlich:

Lineare Abbildung: Spiegeln an der x -Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der x -Achse:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 10

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildung: Spiegeln an der y -Achse

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung an der y -Achse:

$$Y = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 11

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildung: Punktspiegelung am Ursprung

Abbildungsmatrix für eine Spiegelung am Ursprung:

$$U = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (= \text{Spiegelung an } x\text{- und } y\text{-Achse})$$

Beispiel:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 12

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ :

$$R = \begin{pmatrix} \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{im Uhrzeigersinn!})$$

Beispiel: Drehe um 90° (im Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 13

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildung: Rotation um Winkel φ

Abbildungsmatrix für eine Rotation um den Winkel φ :

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{im Gegen-Uhrzeigersinn!})$$

Beispiel: Drehe um 90° (im Gegen-Uhrzeigersinn)

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 14

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildungen kombinieren

Matrizen in umgekehrter Reihenfolge multiplizieren!

Beispiel: $(0, -1)^T$ zuerst an x -Achse spiegeln, danach noch im Uhrzeigersinn um 90° drehen: $\rightarrow$ Abb.matrix $R \cdot X$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 15

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildung: Rotation um x -Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x -Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & \sin(\varphi) \\ 0 & -\sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{im Uhrzeigersinn!})$$

Beispiel: Drehe (um 90° im Uhrzeigersinn) um x -Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 16

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildung: Rotation um x -Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die x -Achse:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) \\ 0 & \sin(\varphi) & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{im GUS=Gegen-Uhrzeigersinn!})$$

Beispiel: Drehe (um 90° im GUS) um x -Achse

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildungen 17

www.mathcourses.ch/mat141.html

Lineare Abbildung: Rotation um y -Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die y -Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & 0 & \sin(\varphi) \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin(\varphi) & 0 & \cos(\varphi) \end{pmatrix} \quad (\text{im Uhrzeigersinn!})$$

Beispiel: Drehe (um 90° im Uhrzeigersinn) um y -Achse

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Lineare Abbildung: Rotation um z -Achse

Abb.matrix für eine Rotation (um φ) um die z -Achse:

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi) & -\sin(\varphi) & 0 \\ \sin(\varphi) & \cos(\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{im GUS=Gegen-Uhrzeigersinn!})$$

Beispiel: Drehe (um 90° im GUS) um z -Achse

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$