www.mathcourses.ch/mat182.html

# Formelsammlung MAT182

## 1 Wichtigste Algebra-Grundlagen

### 1.1 Potenzgesetze

1. $(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$
3. $a^0 = 1 \qquad 1^n = 1$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

### 1.2 Logarithmusgesetze

*Hinweis: Falls nur log(...) steht, meinen Mathematiker oft ln(...)*

1. $\log x + \log y = \log(x \cdot y) \qquad \log x - \log y = \log(\frac{x}{y}) \qquad n \cdot \log x = \log(x^n)$
2. $e^{\ln x} = x = \ln e^x$ (falls nichts zwischen e und ln ist!! Sonst zuerst Potenz-/Logarithmengesetze anwenden!)
3. $\ln(e) = 1 \qquad \log_b(1) = 0$
4. $b^{\log_b(x)} = x = \log_b(b^x)$
5. Definition $\qquad y = b^x \Leftrightarrow \log_b(y) = x$
6. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (Basiswechselsatz)

**Hausaufgaben-Empfehlung vor dem PVK: "Vorarbeit_PVK_Grundlagen-Algebra"** (PDF siehe Homepage)

### 1.3 Gleichungen lösen

1. Quadratische Gleichungen $ax^2 + bx + c = 0$:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad (Mitternachtsformel)$$

2. Kubische Gleichungen (z.B. $x^3 + ax^2 + bx + c = 0$):

   1. Nullstelle (durch pröbeln) erraten  2. Polynomdivision anwenden (siehe Link)

   `https://youtu.be/K8K4_gowb4E?si=nbw-soxyW4zIEDlv`

## 1.4 Trigonometrie

| $x$ | $0$ | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ | $\frac{7\pi}{6}$ | $\frac{5\pi}{4}$ | $\frac{4\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{2}$ | $\frac{5\pi}{3}$ | $\frac{7\pi}{4}$ | $\frac{11\pi}{6}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | $0$ | $30°$ | $45°$ | $60°$ | $90°$ | $120°$ | $135°$ | $150°$ | $180°$ | $210°$ | $225°$ | $240°$ | $270°$ | $300°$ | $315°$ | $330°$ |
| $\sin x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ |
| $\cos x$ | $1$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ | $\frac{-1}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | -1 | $\frac{-\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{-\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{-1}{2}$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| $\tan x$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | * | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ | $0$ | $\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $1$ | $\sqrt{3}$ | * | $-\sqrt{3}$ | $-1$ | $\frac{-\sqrt{3}}{3}$ |

**Beispiel**: $\arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3}$

* exisitert nicht, aber $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \infty$ bzw. $\arctan(\infty) = \frac{\pi}{2}$

$\sin(x) = \sin(x + 2\pi)$; $\cos(x) = \cos(x + 2\pi)$; $\tan(x) = \tan(x + \pi)$

(z.B. praktisch für negative Werte)

| $x$ | $-\frac{\pi}{6}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{3}$ | $-\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|
| | $-30°$ | $-45°$ | $-60°$ | $-90°$ |
| $\sin x$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $-1$ |
| $\cos x$ | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | $\frac{\sqrt{2}}{2}$ | $\frac{1}{2}$ | $0$ |
| $\tan x$ | $-\frac{\sqrt{3}}{3}$ | $-1$ | $-\sqrt{3}$ | * |

* exisitert nicht, aber $\lim_{x\to-\frac{\pi}{2}} \tan(x) = \lim_{x\to\frac{3\pi}{2}} \tan(x) = -\infty$

1. Bogenmass $\xrightarrow{\cdot\frac{360°}{2\pi}}$ Gradmass, Gradmass $\xrightarrow{\cdot\frac{2\pi}{360°}}$ Bogenmass
2. $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad \tan x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$
3. $\sin(-x) = -\sin x$ $\quad \cos(-x) = \cos x$ $\quad \tan(-x) = -\tan x$
4. $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ (Additionstheoreme)

   $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$

# 2 Differentialrechnung

## 2.1 Ableitungsregeln

1. Produktregel $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$
2. Quotientenregel $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$
3. Kettenregel $[u(v(x))]' = \underbrace{u'(v(x))}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{v'(x)}_{\text{innere Abl.}}$

## 2.2 Kurvendiskussion

1. $f$ ist (streng) monoton $\begin{cases} \text{wachsend} & \text{falls } f'(x) > 0 \\ \text{fallend} & \text{falls } f'(x) < 0 \end{cases}$

2. Nullstellen: $f(x) = 0$

3. Extremalstellen bestimmen
   - kritische Punkte: $f'(x_0) = 0 \Rightarrow x_0$ ist ein $\begin{cases} \text{Minimum} & \text{falls } f''(x_0) > 0 \\ \text{Maximum} & \text{falls } f''(x_0) < 0 \\ \text{Terrassenpunkt} & \text{falls } f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0 \end{cases}$
   - Randpunkte (bei abgeschlossenem Definitionsbereich $D_f = [a, b]$ )
   - (ev.) nicht differenzierbare Stellen

4. $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0 \Rightarrow x_0$ ist ein Wendepunkt $\xrightarrow{f'''(x_0)=0}$ siehe Playlist-Zusatzvideo

5. Globale Extrema? $\Rightarrow$ $y$-Werte vergleichen!
   - bei abgeschlossenem Definitionsbereich $[a, b]$ gibt es immer ein globales Maximum & glob. Minimum!
     $\rightarrow$ grösster $y$-Wert ist das globale Maximum, kleinster $y$-Wert das globale Minimum.
   - bei offenem Definitionsbereich $(a, b)$ gibt es nicht unbedingt ein glob. Max. und/oder globales Min.!
     $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to b} f(x)$ berechnen.
     Falls $\lim_{x\to a,b} f(x)$ grösster oder kleinster Wert ist $\Rightarrow$ kein globales Max. / Min. vorhanden

## 2.3 Optimierungsaufgaben (*mit Nebenbedingung*)

1. **Was** soll maximiert / minimiert werden!? $\longrightarrow$ Formel finden $\ldots = f(x)$ ! ( *oder* $= f(x, y)$ )
   (a) Schnelligkeit (einer Ortskurve $\vec{x}(t)$): $f(x) = |\dot{\vec{x}}(t)|$
   (b) Abstand zwischen $P(x_0|y_0)$ und $y = f(x)$: $f(x) = \sqrt{\left(x - x_0\right)^2 + \left(f(x) - y_0\right)^2}$

2. *Eventuell Nebenbedingung nach $x$ oder $y$ auflösen und oben einsetzen*

3. Globales Maximum / Minimum von $f(x)$ bestimmen

# 3 Integralrechnung

## 3.1 Vier Methoden um ein Integral zu lösen:

1. direkt / einfaches Integral (eventuell nach Vereinfachung / Algebra-Umformungen!)
2. Integral-Tabelle benutzen (z.B. oft bei $\frac{1}{\dots}$ oder $\sqrt{\dots}$ )
3. Substitutionsmethode ($\leftarrow$ Kettenregel)
4. Partielle Integration ($\leftarrow$ Produktregel)

## 3.2 weitere Integral-Aufgaben

1. Uneigentliches Integrale
2. Rotationsvolumen: $V = \pi \int_a^b \big(f(x)\big)^2 \, dx$
3. (geometrische) Fläche berechnen
   - zwischen zwei Kurven $f(x)$ und $g(x)$ mit Schnittpunkten SP1 und SP2: $\left| \int_{\text{SP1}}^{\text{SP2}} f(x) - g(x) \, dx \right|$
   - zwischen $f(x)$ und der $x$-Achse (mit Nullstellen NS1 und NS2): $\left| \int_{\text{NS1}}^{\text{NS2}} f(x) \, dx \right|$

# 4 Weitere wichtige Formeln & Themen

1. Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion

   (a) für $f^{-1}(x) = g(x)$: $\quad g'(x) = \dfrac{1}{f'(g(x))}$

   (b) nur für einzelnen Punkt $y_0 = f(x_0)$: $\quad (f^{-1})'(y_0) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(y_0))} = \dfrac{1}{f'(x_0)}$

2. Linearisierung der Funktion $f(x)$ an der Stelle $x_0$: $\quad f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$

3. Definitionsbereich bestimmen: *(MAT182 VL folgende) "potentielle Problemfälle umgehen"*

   (a) $\dfrac{1}{\underbrace{\text{Nenner}}_{\dots \neq 0}}$

   (b) $\sqrt{\underbrace{\dots}_{\geq 0}}$

   (c) $\log_b(\underbrace{\dots}_{\dots > 0})$

   (d) $\arcsin(\underbrace{\dots\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) = \sin^{-1}(\underbrace{\dots\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1})$ und $\arccos(\underbrace{\dots\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1}) = \cos^{-1}(\underbrace{\dots\dots}_{-1 \leq \dots \leq 1})$

4. Stetigkeit in $x_0$ prüfen & Differenzierbarkeit in $x_0$ prüfen

   (a) $\lim\limits_{x \uparrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow x_0^+} f(x) =: f(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ stetig in $x_0$

   (b) $\lim\limits_{x \uparrow x_0^-} f(x) = \lim\limits_{x \downarrow x_0^+} f(x) =: f(x_0)$ **und** $\lim\limits_{x \uparrow x_0^-} f'(x) = \lim\limits_{x \downarrow x_0^+} f'(x) =: f'(x_0) \quad \Rightarrow \quad f(x)$ differenzierbar in $x_0$

   differenzierbar $\Rightarrow$ stetig

   nicht stetig $\Rightarrow$ nicht differenzierbar

5. Exponentielles Wachstum / Zerfall

   - mit Halbwertszeit = T: / Verdoppelungszeit = T $\quad N(t) = K \cdot e^{\pm \lambda \cdot t}, \quad K =$ Wert zur Zeit 0, $\quad \lambda = \dfrac{\ln(2)}{\mathrm{T}}$,

     $\pm$ : Wachstum / Zerfall

   - mit Wachstum(srate) $p$ %: (= jährliche Zu/Abnahme) $\quad N(t) = K\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right)^t$

   - Umrechnung: $\quad \lambda = \ln\left(1 \pm \dfrac{p}{100}\right) \quad p = \pm 100 \cdot \left(e^{\lambda} - 1\right) = \pm 100 \cdot \left(\exp(\lambda) - 1\right)$

6. Approximation

   (a) für die Verdoppelungszeit von Kapital bei jährlichem Zinssatz von p %: $\quad T \approx 70/p$

   (b) $\ln(2) \approx 0.70$

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat182.html

# DGL Übersicht
# (für MAT182)