MathCourses

www.mathcourses.ch/mat182.html

MAT182 PVK

Vorarbeit

"Vektorgeometrie Grundlagen"

(inklusive Lernkärtchen & Lösungen)

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Vektor zwischen zwei Punkten:

Man rechnet immer Endpunkt - Anfangspunkt.

Beispiel: $A(1,-3,3),\ B(-5,3,0)$

Vektor $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -5-1 \\ 3-(-3) \\ 0-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Länge eines Vektors:

Die Länge eines Vektors Vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ ist:

$\left|\vec{v}\right| = \sqrt{(x)^2 + (y)^2 + (z)^2}$

Beispiel: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

$\rightarrow \left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(-6)^2 + 6^2 + (-3)^2} = \sqrt{81} = 9$

Länge eines Vektors verändern:

Länge von $\vec{v}$ um λ verändern: $\lambda \cdot \vec{v}$

Beispiel:

Vektor $\overrightarrow{AB}$ (mit $\left|\overrightarrow{AB}\right| = 9$) soll Länge 1 haben.

$\Rightarrow$ Wir müssen $\overrightarrow{AB}$ mit 1/9 multiplizieren:

$\overrightarrow{AB} := \begin{pmatrix} -2/3 \\ 2/3 \\ -1/3 \end{pmatrix}$ hat Länge 1.

Paramterdarstellung einer Geraden:

$g:\ \vec{r} =$ Ortsvektor $+\ t\cdot$ Richtungsvektor

Gerade durch zwei Punkte A und B:

$g:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB}$

Beispiel: Gerade g durch $A(1,-3,3)$ und $B(-5,3,0)$

$g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}$

Parameterdarstellung einer Ebene:

Ebene durch drei Punkte A, B und C:

$E:\ \vec{r} = \overrightarrow{OA} + t \cdot \overrightarrow{AB} + s \cdot \overrightarrow{AC}$

Beispiel:

Ebene durch $A(1,-3,3), B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

$E:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt & Skalarprodukt:

$\vec{v} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}, \quad \vec{w} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$

Vektorprodukt: $\vec{v} \times \vec{w} = \begin{pmatrix} y_1 z_2 - z_1 y_2 \\ z_1 x_2 - x_1 z_2 \\ x_1 y_2 - y_1 x_2 \end{pmatrix}$

(ergibt einen Vektor welcher senkrecht zu $\vec{v}$ und zu $\vec{w}$ steht)

Skalarprodukt: $\vec{v} \cdot \vec{w} = x_1 \cdot x_2 + y_1 \cdot y_2 + z_1 \cdot z_2$

(um Winkel zwischen $\vec{v}$ und $\vec{w}$ zu berechnen)

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v} \cdot \vec{w}}{\left|\vec{v}\right|\ \left|\vec{w}\right|}\right)$$

Beispiel: $\vec{v_1} = \begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix}, \vec{v_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{v_3} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -4 \end{pmatrix}$

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = -6 + 30 + 3 = 27,\ \left|\vec{v_1}\right| = 9,\ \left|\vec{v_2}\right| = \sqrt{27} \rightarrow \cos^{-1}\left(3/\sqrt{27}\right) = 54.74^\circ$

Rechter Winkel $\Longleftrightarrow$ Skalarprodukt $= 0$:

$\vec{v_1} \cdot \vec{v_3} = -6 - 6 + 12 = 0 \rightarrow \cos^{-1}(0) = 90^\circ$, d.h. rechter Winkel zw. $\vec{v_1}$ und $\vec{v_3}$

Vektorprodukt braucht man um:

- Die Fläche eines Dreiecks ABC zu berechnen:

  Fläche $\triangle = \frac{\left|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}\right|}{2}$

- senkrechten Vektor zu $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ berechnen:

  (z.B. Normalenvektor $\vec{n}$)

  $\vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

Koordinatengleichung einer Ebene:

$\boldsymbol{a}x + \boldsymbol{b}y + \boldsymbol{c}z + \boldsymbol{d} = 0$

wobei $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n} =$ Normalenvektor

1. Normalenvektor $\rightarrow$ a, b, c bestimmen
2. Punkt in Koordinatengleichung einsetzen
3. Gleichung nach d auflösen

   $\Rightarrow$ Koordinatengleichung der Ebene

Koordinatengleichung einer Ebene:

Beispiel: Ebene E durch $A(1,-3,3)$, $B(-5,3,0)$ und $C(2,2,2)$

1. Richtungsvektoren $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC} \longrightarrow \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$:

   $$\begin{pmatrix} -6 \\ 6 \\ -3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ -9 \\ -36 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \; a = 9, b = -9, c = -36$$

2. $A(x = 1, y = -3, z = 3)$ in $9x - 9y - 36z + d = 0$ einsetzen:
3. $9 + 27 - 108 + d = 0 \quad \rightarrow \quad d = 72$

   $\Rightarrow E: \; 9x - 9y - 36z + 72 = 0 \quad :9 \rightarrow \quad \underline{E: \; x - y - 4z + 8 = 0}$

Schnittpunkt einer Geraden und Ebene:

1. Gerade zusammenfassen:

   $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 6 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+6t \\ 2-4t \\ 3+5t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

2. Ebene in Koordinatengleichung $ax + by + cz + d = 0$
3. Für x, y, z die Koordinaten der Geraden einsetzen
4. Gleichung nach t auflösen
5. Lösung in Gerade einsetzen $\rightarrow$ Schnittpunkt

Schnittgerade zweier Ebenen:

1. Koordinatengleichung der Ebenen $\rightarrow \vec{n_1}, \vec{n_2}$
2. Vektorprodukt von $\vec{n_1} \times \vec{n_2} := v \;\widehat{=}$ Richtungsvektor
3. Punkt auf Schnitttgeraden ($\widehat{=}$ Ortsvektor). Z.B.:
   - 1 Vble frei wählen, z.B. $x = 0$
   - in Koordinatengleichungen einsetzen
   - $\rightarrow 2 \times 2$ Gleichungssystem lösen $\rightarrow$ Punkt
   - $\Rightarrow$ Parameterdarstellung der Schnittgeraden

Neigungswinkel zw. einer Geraden und Ebene:

1) Richtungsvektor der Gerade bestimmen ($=: \vec{v}$)

2) Normalenvektor der Ebene bestimmen ($=: \vec{n}$)

3) Neigungswinkel:

$$\varphi = \arcsin\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right) = 90° - \arccos\left(\frac{|\vec{v} \cdot \vec{n}|}{|\vec{v}| \cdot |\vec{n}|}\right)$$

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen:

1) beide Normalenvektoren ($\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$) bestimmen

2) Schnittwinkel $= \varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}\right)$

Abstand zweier Punkte A und B:

$A(x_1, y_1, z_1), \; B(x_2, y_2, z_2)$

$$\text{Abstand} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Abstand von Punkt A zur Ebene E:

$A = (x_1, y_1, z_1), \quad E: ax + by + cz + d = 0:$

$$\text{Abstand} = \frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

Für alle die die Lernkärtchen gerne gemeinsam anschauen wollen:

In folgendem Video gehe ich die Lernkärtchen Schritt für Schritt durch:

`https://youtu.be/1D5-jOPdDxM`

(findet ihr aber auch in der Playlist, wo alle Zusatz-Videos und Podcast-Aufzeichnungen drin sind)

Vorarbeit - Vektorgeometrie Grundlagen

Rep-HS15 - Aufgabe 1h) :

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien definiert als $\vec{e}_1 := (5,0,0)$ und $\vec{e}_2 := (0,2,3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

Lösung: $(0,\ -45,\ 30)^T$

HS17 - Aufgabe 2a): Gegeben seien neben Ursprung $O(0,0,0)$ auch die Punkte $A(1,1,1)$ und $B(0,2,0)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$.

Lösung: a) $\varphi = \arccos(1/\sqrt{3})$

Rep-HS15 - Aufgabe 2 :

a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten (0,0,1), (0,1,0), (0,0,3).

b) Geben Sie die Cosinus' der drei Winkel des Dreiecks an (kürzen soweit möglich).

Lösung: a) 1 b) in (0,0,1): $\cos(\alpha) = \frac{-\sqrt{2}}{2} = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

in (0,1,0): $\cos(\beta) = \frac{4}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$ in (0,0,3): $\cos(\gamma) = \frac{3}{\sqrt{10}}$

HS12 - Aufgabe 2:

Wie lautet die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte A(0,0,1), B(0,1,0) und C(1,0,0) geht?

Lösung: $x + y + z - 1 = 0$

Rep-HS13 - Aufgabe 2: Wir legen durch die drei Punkte $(1,0,0), (0,1,0)$ und $(0,0,1)$ eine Ebene.

a) Machen Sie dazu eine Skizze und geben Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an (Herleitung wegen schöner Zahlen und Skizze nicht nötig).

b) Geben Sie noch einen zweiten, anderen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an.

c) Wie sieht die Ebenengleichung aus?

d) Welche Winkel hat die Ebene zur xy-Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lasssen]

Lösung: a) $\vec{n} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$ b) $\vec{n}_2 = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T$

c) $x + y + z - 1 = 0$ d) $\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \arcsin\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)$

HS15 - 1-Minuten Fragen :

b) Sie haben 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, in welchen Fällen das Skalarprodukt 0 ist.

c) Folgt aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ dass auch $\vec{b} = \vec{c}$? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein einfaches Gegeneispiel an.

Lösung: b) wenn $\vec{a}$ oder $\vec{b}$ Nullvektoren sind; Oder $\vec{a} \perp \vec{b}$ (senkrecht)

c) Nein! (nicht wenn $\vec{a}$ der Nullvektor ist)

MAT182 Vorbereitungskurse

Lösungen

Vektorgeometrie Grundlagen

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat182.html

Rep-HS15 - Aufgabe 1h) :

Die Vektoren $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ seien definiert als $\vec{e}_1 := (5, 0, 0)$ und $\vec{e}_2 := (0, 2, 3)$. Welchen Vektor erhält man, wenn man das Kreuzprodukt von $\vec{e}_1$ und $\vec{e}_2$ bildet und den resultierenden Vektor noch um den Faktor 3 streckt?

$$\vec{e}_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Kreuzprodukt = Vektorprodukt :

$$\begin{array}{c}\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ 5 \end{array} \times \begin{array}{c}\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \\ 0 \end{array} = \begin{pmatrix} 0 \cdot 3 - 0 \cdot 2 \\ 0 \cdot 0 - 5 \cdot 3 \\ 5 \cdot 2 - 0 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix}$$

um den Faktor 3 strecken :

$$3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -15 \\ 10 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 0 \\ -45 \\ 30 \end{pmatrix}}} = (0, -40, 30)^T$$

HS17 - Aufgabe 2a): Gegeben seien neben Ursprung $O(0,0,0)$ auch die Punkte $A(1,1,1)$ und $B(0,2,0)$. Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{OA}$ und $\vec{OB}$.

Winkel zw. 2 Vektoren :
(Lernkärtchen)

Winkel φ zwischen zwei Vektoren $\vec{v}$ und $\vec{w}$:

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{w}}{|\vec{v}|\,|\vec{w}|}\right)$$

$$\vec{v} = \vec{OA} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \qquad \vec{w} = \vec{OB} = \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}$$

Skalarprodukt $\vec{v}\bullet\vec{w}$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} = 1\cdot 0 + 1\cdot 2 + 1\cdot 0 = \underline{\underline{2}}$$

Länge eines Vektors :

$$\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2} = \sqrt{3}$$

$$\left|\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}\right| = \sqrt{(0)^2+(2)^2+(0)^2} = \sqrt{4} = 2$$

$$\varphi = \arccos\left(\frac{\cancel{2}}{\sqrt{3}\cdot\cancel{2}}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}$$

Rep-HS15 - Aufgabe 2 :

a) Berechnen Sie die Fläche des Dreiecks mit den Eckpunkten (0,0,1), (0,1,0), (0,0,3).

b) Geben Sie die Cosinus' der drei Winkel des Dreiecks an (kürzen soweit möglich).

Fläche vom Dreieck ABC: $\dfrac{|\vec{AB}\times\vec{AC}|}{2}$

egal welcher Eckpunk A, B und C ist!

a) z.B. $\vec{AB} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}$ und $\vec{AC} = \begin{pmatrix} 0-0 \\ 0-0 \\ 3-1 \end{pmatrix}$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\frac{\left|\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}{2} = \frac{\left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right|}{2} = \frac{\sqrt{(2)^2+(0)^2+(0)^2}}{2} = \frac{\sqrt{4}}{2} = \underline{\underline{1}}$$

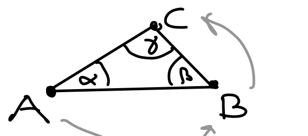
$\varphi = \sphericalangle(\vec{a},\vec{b})$

Skalarprodukt

b) $$\cos(\varphi) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$$

Länge $= \sqrt{(\ )^2+(\ )^2+(\ )^2}$

Dreieck:



Reihenfolge der Punkt-Bezeichnung

- $$\cos(\alpha) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{0\cdot 0 + 1\cdot 0 + (-1)\cdot 2}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{-2}{\sqrt{2}\cdot 2} = \frac{-1}{\sqrt{2}} = \cos(\alpha)$$

  $\sqrt{0^2+1^2+(-1)^2}$ $\quad$ $\sqrt{0^2+0^2+2^2} = \sqrt{4}$

  bzw. $\alpha = \cos^{-1}\left(\frac{-1}{\sqrt{2}}\right)$

$\vec{BA} = -\vec{AB}$

- $$\cos(\beta) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}} = \frac{0\cdot 0 + (-1)\cdot(-1) + 1\cdot 3}{\underbrace{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}_{\sqrt{2\cdot 10} = \sqrt{20}}} = \frac{4}{\sqrt{20}} = \cos(\beta)$$

  $\frac{4}{\sqrt{4\cdot 5}} = \frac{4}{2\cdot\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

  $\sphericalangle(\vec{BA},\vec{BC})$

  bzw. $\beta = \arccos\left(\frac{4}{\sqrt{20}}\right)$
  $\quad\parallel$
  $\cos^{-1}\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)$

- $$\cos(\gamma) = \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}}{2\cdot\sqrt{10}} = \frac{0+0+6}{2\cdot\sqrt{10}} = \frac{3}{\sqrt{10}} = \cos(\gamma)$$

  bzw $\gamma = \cos^{-1}\left(\frac{3}{\sqrt{10}}\right)$

HS12 - Aufgabe 2:

Wie lautet die Gleichung der Ebene, welche durch die drei Punkte A(0,0,1), B(0,1,0) und C(1,0,0) geht?

Koordinatengleichung: $ax + by + cz + d = 0$

mit $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \vec{n} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$

$$\underbrace{\overset{\text{"B-A"}}{\begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}}} \quad \underbrace{\overset{\text{"C-A"}}{\begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}}}$$

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\cdot(-1) - (-1)\cdot 0 \\ (-1)\cdot 1 - 0\cdot(-1) \\ 0\cdot 0 - 1\cdot 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} a = -1 \\ b = -1 \\ c = -1 \end{array}$$

$\longrightarrow$ Koordinatengleichung der Ebene durch A, B, C:

$$(-1)\cdot x + (-1)\cdot y + (-1)\cdot z + d = 0$$

$$-x - y - z + d = 0$$

- d herausfinden durch einsetzen eines Punktes $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$:

$$A = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow -0 - 0 - 1 + d = 0 \quad \mid +1$$

$$d = 1$$

$\Rightarrow$ Koo-Gl.: $\underline{\underline{-x - y - z + 1 = 0}}$

Hinweis: Ist eine korrekte Lösung, aber jedes Vielfache davon ist genauso!

Denn es ist ja eine Gleichung,
d.h. kann man beliebig (auf beiden Seiten) multiplizieren
und rechts bleibt aber immer 0 $= 0 \cdot \lambda$

beliebige Zahl

Rep-HS13 - Aufgabe 2: Wir legen durch die drei Punkte $(1,0,0)$, $(0,1,0)$ und $(0,0,1)$ eine Ebene.

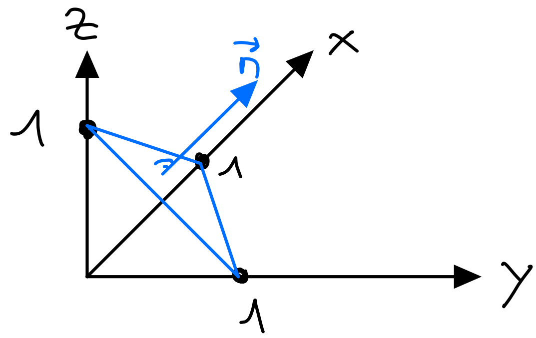
a) Machen Sie dazu eine Skizze und geben Sie einen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an (Herleitung wegen schöner Zahlen und Skizze nicht nötig).

b) Geben Sie noch einen zweiten, anderen Normalenvektor der Länge 1 zur Ebene an.

c) Wie sieht die Ebenengleichung aus?

d) Welche Winkel hat die Ebene zur xy-Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lasssen]

a)



$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 0-0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0-1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-0 \\ 0-(-1) \\ 0-(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

-1 $\quad -1$

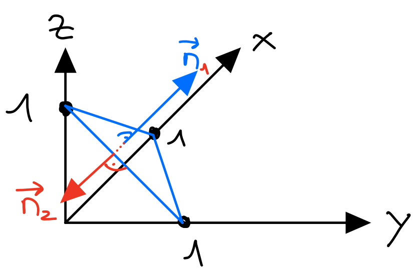
hat Länge $\sqrt{(1)^2+(1)^2+(1)^2}' = \sqrt{3}$

$\Rightarrow$ um Faktor $\sqrt{3}$ kürzen: $\begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$ hat nun Länge 1

b) 2. Vektor entgegengesetzt:
(d.h. andere Vorzeichen)

$\downarrow$

$$\underline{\underline{\vec{n}_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \end{pmatrix}}}$$



c) nehme lieber $\vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \longrightarrow 1\cdot x + 1\cdot y + 1\cdot z + d = 0$

$(1,0,0)$ einsetzen $\Rightarrow 1\cdot 1 + 1\cdot 0 + 1\cdot 0 + d = 0 \Rightarrow d = -1$

$\longrightarrow$ Kco.-Gleichung: $\underline{\underline{x + y + z - 1 = 0}}$

d) Welche Winkel hat die Ebene zur xy-Ebene? [Es ist nicht 45!; sie können den trigonometrischen Ausdruck stehen lasssen]

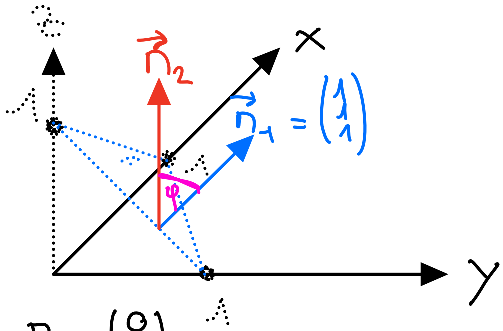
d)

Schnittwinkel zwischen zwei Ebenen:

1) beide Normalenvektoren ($\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$) bestimmen

2) Schnittwinkel $= \varphi = \arccos\left(\frac{|\vec{n_1}\cdot\vec{n_2}|}{|\vec{n_1}|\cdot|\vec{n_2}|}\right)$

Vektorgeometrie 13 *www.mathcourses.ch/mat182.html*



1) xy-Ebene hat als Normalenvektor (= senkrecht auf beide Richtungsvektoren) die Richtung parallel zur z-Achse, also z.B. $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

2) $$\varphi = \arccos\left(\frac{\left|\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right|}{\sqrt{3}\cdot 1}\right) = \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

HS15 - 1-Minuten Fragen :

b) Sie haben 2 Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$. Beschreiben Sie in natürlicher Sprache, in welchen Fällen das Skalarprodukt 0 ist.

c) Folgt aus $\vec{a}\vec{b} = \vec{a}\vec{c}$ dass auch $\vec{b} = \vec{c}$? Wenn ja, beweisen Sie es, wenn nein, geben Sie ein einfaches Gegeneispiel an.

b) Das Skalarprodukt zw. 2 Vektoren ist 0,

$SP = 0$

$\uparrow$

$\cos(90°) = 0$

wenn der Winkel zw. den beiden Vektoren 90° ist.

Also die zwei Winkel senkrecht aufeinander stehen.

Theoretisch mögliche Ausnahmesituation:

Mind. einer der beiden Vektoren ist der $\vec{0}$

$SP = 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots + 0 \cdot \ldots \overset{!}{=} 0$

c) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c} \xrightarrow{\cancel{?!}} \vec{b} = \vec{c}$

Viele Zahlen-Gegenbeispiele denkbar:

- $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 + 1 - 1 = 0$

  aber auch $\vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ hat $\vec{a} \cdot \vec{c} = 1 - 1 + 0 = 0$

  und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{b} \neq \vec{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

- noch einfacher, Idee von vorheriger Teilaufgabe mit Sonderfall:

  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{v}$ ist immer gleich 0 (für alle $\vec{v}$)

  $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ mit $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$