MAT182 PVK

1-Minuten-Aufgaben:

DGL

Exponentielles Wachstum

Linearisieren / Approximieren

Übersicht:

Homepage / Webseite:

`www.mathcourses.ch/mat182.html`

Differentialgleichungen

HS21 - Aufgabe 1g) (Version A)

Zeigen Sie, dass $y = x^2$ folgende Differentialgleichung löst:

$$2y + y' - y''(x + x^2) + y''' = 0.$$

Lösung:

$y' = 2x,\ y'' = 2,\ y''' = 0$

$\rightarrow 2x^2 + 2x - 2(x + x^2) + 0 = 0$

HS20 - Aufgabe 1c) (Version A)

Zeigen Sie, dass $y = x^3$ folgende Differentialgleichung löst:

$$3y - xy' + y'' - xy''' = 0.$$

Lösung:

$y' = 3x^2,\ y'' = 6x,\ y''' = 6$

$\rightarrow 3x^3 - x \cdot 3x^2 + 6x - x \cdot 6 = 0$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 1c)

Geben Sie auf $x > 0$ ein Beispiel einer Funktion an, deren Ableitung immer genau den dreifachen Kehrwert des Arguments hat (Argument ist das "x"). Geben Sie alle Funktionen mit dieser Eigenschaft an.

Lösung:

$y' = 3 \cdot \frac{1}{x}$

$\rightarrow y(x) = 3\ln(x)$ alle: $y(x) = 3\ln(x) + C$

HS19 - Aufgabe 1b)

Zeigen Sie, dass $y = \sin(x)$ folgende Differenzialgleichung löst: $y^{(2)} + 2y = \sin(x)$.

Lösung:

$y' = \cos(x),\ y'' = -\sin(x)$

$-\sin(x) + 2\sin(x) = \sin(x)$

HS19 - Aufgabe 1c)

Löst $y = \sin(x) + 7\sin(\sqrt{2}x)$ auch $y^{(2)} + 2y = \sin(x)$? Mit Beweis falls JA oder sonst Gegenargument wenn NEIN.

Lösung:

Ja: $y' = \cos(x) + 7\sqrt{2}\cos(\sqrt{2}x),\ y'' = -\sin(x) - 7(\sqrt{2})^2\sin(\sqrt{2}x)$

$(-\sin(x) - 14\sin(\sqrt{2}x)) + 2 \cdot (\sin(x) + 7\sin(\sqrt{2}x)) = \sin(x)$

HS19 - Aufgabe 1d)

Finden Sie eine Lösung der folgenden Differenzialgleichung: $y^{(2)} + 2y = \cos(x)$

Lösung: $y = \cos(x)$

Rep-HS18 (Aug. 2019) - Aufgabe 1c)

Geben Sie ein Beispiel einer Funktion an, deren Ableitung immer genau den dreifachen Wert der Funktion selber hat. Geben Sie alle Funktionen mit dieser Eigenschaft an.

Lösung: $y' = 3 \cdot y$ (lineare DGL)
$\to y(x) = e^{3x}$ alle: $y(x) = K \cdot e^{3x}$

HS17 - Aufgabe 1e)

Prüfen Sie, ob $y = x\sin(x)$ eine Lösung der folgenden Differentialgleichung 2. Ordnung ist:

$$y + y'' = 2\cos(x).$$

Lösung: ableiten und einsetzen $\to$ Ja

HS16 - Aufgabe 1e)

Geben Sie *alle* Funktionen mit der Eigenschaft an, dass deren Ableitung überall genau dem Funktionswert entspricht (mit Herleitung).

Lösung: $y' = y \quad y = Ke^x$

HS16 - Aufgabe 1f)

Geben Sie *alle* Funktionen mit der Eigenschaft an, dass deren Ableitung überall genau dem doppelten Funktionswert entspricht (mit Herleitung).

Lösung: $y' = 2y \quad y = Ke^{2x}$

HS16 - Aufgabe 1g)

Geben Sie *alle* Funktionen mit der Eigenschaft an, dass deren Ableitung überall genau dem Kehrwert des Arguments ("x-Wert") entspricht (nur für $x > 0$) (mit Herleitung).

Lösung: $y' = \frac{1}{x} \quad y = \ln(x) + C$

HS16 - Aufgabe 1h)

Geben Sie eine nicht-konstante Funktion an, bei der die vierte Ableitung wieder die ursprüngliche Funktion ist. Beschreiben Sie diese Aufgabenstellung auch mit Hilfe einer Differentialgleichung.

Lösung: $y'''' = y \quad \sin(x)$ oder $\cos(x)$

HS15 - Aufgabe 1e)

Geben Sie erstmal die allgemeine Lösung zur Differentialgleichung $y' = x^8 y$ an. Geben Sie jetzt eine spezielle Lösung an, welche durch den Punkt (1,2) geht.

Lösung: $y = Ke^{\frac{x^9}{9}} \quad y = 2e^{-\frac{1}{9}}e^{\frac{x^9}{9}} = 2e^{-\frac{1}{9}+\frac{x^9}{9}}$

Rep-HS14 (Sept. 2015) - Aufgabe 1d)

Finden Sie durch raten zwei Lösungen der Differentialgleichung $y - y' + y'' - y''' = 0$. Eine davon muss konstant sein, die andere streng monoton wachsend.

Lösung: $y_1 = 0 \quad y_2 = e^x$

Rep-HS14 (Sept. 2015) - Aufgabe 1e)

Finden Sie noch eine dritte Lösung der Differentialgleichung $y - y' + y'' - y''' = 0$. Diese muss periodisch sein mit periode > 0.

Lösung: $\sin(x)$

HS21 - Aufgabe 1c) (Version A)

Bei $y' = \frac{1}{3}y$ wo $y(0) = 1$ ist die Lösung A) keine Exponentialfunktion, B) eine wachsende Exponentialfunktion, C) eine fallende Exponentialfunktion.

Sie müssen die Gleichung nicht lösen; A, B oder C:

Lösung: B

HS21 - Aufgabe 1e) (Version A)

Das Wachstum der Bevölkerung einer Insel werde mit einer Differentialgleichung modelliert. In dieser Aufgabe gibt es keine Auswanderung, nur Einwanderung (Immigration) und Wachstum aus eigener Kraft. Stellen Sie die DGL auf, wenn das Wachstum aus eigener Kraft proportional zur aktuellen Anzahl ist und die Immigration proportional zur Wurzel der aktuellen Anzahl ist. Sie müssen die DGL nicht lösen. Geben Sie aber die allgemeine DGL inklusive Proportionalitätskonstanten an.

Lösung: $y' = ay + b\sqrt{y}$

Exponentielles Wachstum

Rep-HS20 (Sept. 2021) - Aufgabe 1g)

Die Funktion $P(t) = Ce^{\lambda t}$ beschreibt das Wachstum einer Population. Bestimme C und λ, falls $P(0) = 10$ und die Verdoppelungszeit 5 Zeiteinheiten ist.

Lösung: $C = 10,\ \lambda = \frac{\ln(2)}{5}$

HS20 - Aufgabe 1e) (Version A)

Die Halbwertszeit von Plutonium 239 beträgt (1 Antwort ist richtig)

A) 24'110 Jahre, B) 70 Jahre, C) 240'000 Jahre

Lösung: A

HS20 - Aufgabe 1f) (Version B)

Die Halbwertszeit von Jod 131 beträgt (1 Antwort ist richtig)

A) 80 Tage, B) 8.02 Tage, C) 21 Jahre

Lösung: B

HS18 - Aufgabe 1a)

Sie modellieren stetiges Wachstum mit dem Ansatz $f(t) = Ke^{\lambda t}$, wobei die Zeiteinheit Jahre sei. λ sei 0.02. Um wieviel Prozent wächst $f(t)$ innert des ersten Jahres, um wieviel Prozent innerhalb des zweiten Jahres? (Formel stehen lassen, da Taschenrechner nicht erlaubt).

Lösung: 1. Jahr: $(e^{0.02} - 1) \cdot 100$, 2. Jahr: $(e^{0.02} - 1) \cdot 100$

HS21 - Aufgabe 1a) (Version A)

$f(t)$ wachse pro Zeiteinheit um 2 Prozent. Wie lange dauert es bis zur Vervierfachung? Mit einer approximativen Formel aus der Vorlesung (2x angewandt) und exakt (Formel stehen lassen).

Lösung: approx.: $\frac{70}{2} + \frac{70}{2} = 70$ exakt: $(1.02)^n = 4 \to n = \frac{\ln(4)}{\ln(1.02)} = \frac{2\ln(2)}{\ln(1.02)}$

Linearisieren / Approximieren

Rep-HS21 (Sept. 2022) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = e^x + 2x + 5$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 0$ durch und berechnen Sie mit dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.1.

Lösung: $p(x) = 6 + 3x \rightarrow f(0.1) \approx 6 + 0.3 = 6.3$

Rep-HS20 (Sept. 2021) - Aufgabe 1e)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 6x^2 + 2x + 10$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 1$ durch und berechnen sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 1.1.

Lösung: $f(1.1) \approx 18 + 14 \cdot (1.1 - 1) = 19.4$

Rep-HS19 (Aug. 2020) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 3x^2 + x + 28$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 0$ durch und berechnen sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.1.

Lösung: $f(0.1) \approx 28 + 1 \cdot (0.1 - 0) = 28.1$

Rep-HS18 (Aug. 2019) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = x^3 + 5x^2 + 54$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 0$ durch und berechnen sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.2.

Lösung: $f(0.2) \approx 54 + 0 \cdot (x - 0) = 54$

Rep-HS17 (Aug. 2018) - Aufgabe 1d)

Führen Sie bei der Funktion $f(x) = 5x^4 + 3x^2 + 20$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 1$ durch und berechnen Sie mit Hilfe dieser Linearisierung den approximativen Wert von $f(x)$ an der Stelle 0.8.

Lösung: $p(x) = 28 + 26 \cdot (x - 1) \quad \rightarrow \quad f(x) \approx p(0.8) = 22.8$

HS17 - Aufgabe 1c)

Machen Sie bei der Funktion $f(x) = x^3 + x^2$ eine Linearisierung an der Stelle $x_0 = 1$ und berechnen Sie approximativ mit Hilfe dieser Linearisierung den Wert von $f(x)$ an der Stelle 1.1.

Lösung: $p(x) = 2 + 5(x - 1), \quad f(1.1) \approx 2.5$