



MAT183 PVK

1-Minuten-Aufgaben

Formeln für $E(\dots)$ und $V(\dots)$

Homepage / Webseite:

www.mathcourses.ch/mat183.html

FS22-Aufgabe 1k)

Sei X eine $\mathcal{N}(2, 3)$ -Zufallsgrösse und Y eine $\mathcal{N}(3, 4)$ -Zufallsgrösse. X und Y seien unabhängig voneinander. Wie ist $Z := X + Y$ verteilt?

Sei U normalverteilt mit Erwartungswert 2 und Standardabweichung 3 und V normalverteilt mit Erwartungswert 3 und Standardabweichung 4; U und V seien unabhängig voneinander. Wie ist $W := U - V$ verteilt?

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}(5, 7)$ und $W \sim \mathcal{N}(-1, 25)$ **FS22-Aufgabe 1l)**

Sei X eine $\mathcal{N}(5, 6)$ -Zufallsgrösse und Y eine $\mathcal{N}(7, 8)$ -Zufallsgrösse. X und Y seien unabhängig voneinander. Wie ist $Z := X + Y$ verteilt?

Sei U normalverteilt mit Erwartungswert 5 und Standardabweichung 6 und V normalverteilt mit Erwartungswert 7 und Standardabweichung 8; U und V seien unabhängig voneinander. Wie ist $W := 2U + V$ verteilt?

Lösung: $Z \sim \mathcal{N}(12, 14)$ und $W \sim \mathcal{N}(17, 208)$ **FS20-Aufgabe 4a.a)**

Sei X eine $F_{3,5}$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige t_8 -Zufallsgrösse.

Wie sind $E[2X + 3Y]$ und $sd[4X + 5Y]$?

Lösung: $10/3$ und $\sqrt{1900}/3$ **FS20-Aufgabe 4a.b)**

Sei X eine $F_{2,7}$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige χ_8^2 -Zufallsgrösse.

Wie sind $E[-5X + 2Y]$ und $sd[-3X + 2Y]$?

Lösung: 9 und $\sqrt{2629}/5$ **FS20-Aufgabe 4a.c)**

Sei X eine $F_{8,6}$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige $\exp(5)$ -Zufallsgrösse.

Wie sind $E[2X - 3Y]$ und $sd[4X - 1Y]$?

Lösung: $12/5$ und $\sqrt{1351}/5$

FS20-Aufgabe 4a.d)

Sei X eine $F_{6,5}$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige $U[1,2]$ -Zufallsgrösse.

Wie sind $E[3X - 1Y]$ und $sd[2X - 5Y]$?

Lösung:

$7/2$ und $\sqrt{425}/\sqrt{12}$

FS20-Aufgabe 4a.e)

Sei X eine $F_{5,6}$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige $Po(3)$ -Zufallsgrösse. Wie sind $E[-2X + 3Y]$ und $sd[-4X + 2Y]$?

Lösung:

6 und $\sqrt{384}/\sqrt{5}$

FS19-Aufgabe 1d)

Sei X eine $\exp(3)$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige t_5 -Zufallsgrösse. Wie sind $E[aX + bY]$ und $sd[aX + bY]$?

Lösung:

$E[aX + bY] = a/3$, $sd[aX + bY] = \sqrt{a^2/9 + 5b^2/3}$

FS18-Aufgabe 1d)

Sei X eine $F_{6,6}$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige t_4 -Zufallsgrösse. Wie sind $E[aX + bY]$ und $V[aX + bY]$?

Lösung:

$E[aX + bY] = a \cdot \frac{3}{2}$ $V[aX + bY] = (a)^2 \cdot \frac{15}{4} + (b)^2 \cdot 2$

FS17-Aufgabe 1f) Sei X eine $Be(p)$ -Zufallsgrösse und Y eine davon unabhängige $\exp(\lambda)$ -Zufallsgrösse. Wie sind $E[aX + bY]$ und $V[aX + bY]$?

Lösung:

$E = ap + \frac{b}{\lambda}$, $V = a^2p(1-p) + \frac{b^2}{\lambda^2}$

Rep-FS16 - Aufgabe 1e)

Sei X eine $\mathcal{N}(5, 2)$ -Zufallsgrösse, Y eine von X unabhängige χ_3^2 -Zufallsgrösse und Z eine $\text{Bin}(3, 0.5)$ -Zufallsgrösse, welche von X und Y unabhängig ist. Geben Sie $E[4X + 5Y + 6Z]$ sowie $V[2X - 3Y + 2Z]$ an. Benötigen Sie die Unabhängigkeit bei den beiden Rechnungen?

Lösung:

$E = 44$, $V = 65$ unabhängig nur bei V benötigt.

FS16 - Aufgabe 1d)

X sei $\exp(2)$ -verteilt. Wie ist $E[4X + 9]$? Wie ist $E[3X^2]$?

Lösung:

11 $3/2$

Rep-FS17-Aufgabe 1e)

Was ist die durchschnittliche Augensumme, wenn man 3 faire Würfel wirft und die Augensummen zusammenzählt?

Lösung:

$$3 \cdot 3.5 = 10.5$$

Rep-FS20-Aufgabe 1e)

In gewissen Büchern wird die Ge(p)-Verteilung derart modelliert, dass man die Anzahl *Misserfolge* bis zum Erfolg zählt und nicht wie bei uns die Anzahl Versuche. Wie sind dann neu der Erwartungswert und die Varianz einer so definierten Ge(p)-Zufallsgrösse?

Lösung:

$$\text{Erwartungswert } \frac{1}{p} - 1, \text{ Varianz } \frac{1-p}{p^2}$$

Rep-FS15 - Aufgabe 1d)

Sei X eine $\mathcal{N}(3, 4)$ -Zufallsgrösse und Y eine von X unabhängige χ_4^2 -Zufallsgrösse. Geben Sie jetzt $E[2X + 3Y]$ sowie $V[5X - 4Y]$ an.

Lösung:

$$E: 18, V: 228$$

FS15 - Aufgabe 1b)

Seien X und Y zwei iid Zufallsgrössen mit Varianz grösser 0. Was ist grösser, $V[2X]$ oder $V[X+Y]$ (bitte Begründung)?

Lösung:

$$V(2X) = 4V(X) > 2V(X) = V(X+Y)$$

FS15 - Aufgabe 1e)

X sei $U[-0.5, 0.5]$ -verteilt. Wie ist $E[3X + 2]$? Wie ist $V[3X + 2]$?

Lösung:

$$E(3X + 2) = 2, V(3X + 2) = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$$

FS14 - Aufgabe 1d)

X sei $\mathcal{N}(2, 4)$ -verteilt. Berechnen Sie die Varianz von $(X - 3)/8$.

Lösung:

$$V((X - 3)/8) = V(X/8) = \frac{4}{64} = \frac{1}{16}$$

Rep-FS13 - Aufgabe 1b)

X_1 und X_2 seien zwei iid Zufallsgrössen. Was ist grösser: $V[2X_1]$ oder $V[X_1 + X_2]$ (mit Rechnung)?

Lösung:

$$4\sigma^2 = V(2X_1) > V(X_1 + X_2) = 2\sigma^2$$

Rep-FS13 - Aufgabe 1c)

X_1, X_2 und X_3 seien drei iid Zufallsgrößen. Was ist grösser: $V[X_1]$ oder $V[(X_1 + X_2 + X_3)/3]$ (mit Rechnung)?

Lösung:

$$\frac{3}{9}\sigma^2 = V((X_1 + X_2 + X_3)/3) < V(X_1) = \sigma^2$$

Rep-FS13 - Aufgabe 1d)

X sei eine $\text{Ge}(0.3)$ -Zufallsgrösse, Y sei eine von X unabhängige $\text{U}[3,5]$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie $E[X + Y]$ und $V[X + Y]$.

Lösung:

$$E(X + Y) = \frac{22}{3} \text{ und } V(X + Y) = \frac{0.7}{(0.3)^2} + \frac{4}{12} \approx 8.11$$

Rep-FS13 - Aufgabe 1e)

X sei eine $\text{Ge}(0.3)$ -Zufallsgrösse, Y sei eine von X unabhängige $\text{Ge}(0.5)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie die Standardabweichung von $X - Y$.

Lösung:

$$sd(X - Y) = \sqrt{V(X - Y)} = \sqrt{V(X) + V(Y)} = \sqrt{\frac{0.7}{(0.3)^2} + \frac{0.5}{(0.5)^2}} \approx 3.127$$

FS13 - Aufgabe 1f)

Sei $(X_i)_{i=1}^n$ eine Folge von iid $\text{Be}(p)$ -Zufallsgrößen. Sei \bar{X} das arithmetische Mittel (als Zufallsgrösse). Wie gross ist $V(\bar{X})$?

Lösung:

$$V(\bar{X}) = \frac{n \cdot p(1-p)}{n^2} = \frac{p(1-p)}{n}$$

Rep-FS11 - Aufgabe 1e)

X habe eine $\text{Bin}(2, 0.5)$ -Verteilung, Y habe eine $\text{Bin}(2, 0.8)$ -Verteilung; geben Sie den Erwartungswert von $X + Y$ an.

Lösung:

2.6

Rep-FS11 - Aufgabe 1f)

X habe eine $\text{Bin}(2, 0.5)$ -Verteilung, Y habe eine $\text{Bin}(2, 0.8)$ -Verteilung; geben Sie die Varianz von $X + Y$ an, wenn X und Y unabhängig sind.

Lösung:

0.82

FS11 - Aufgabe 1f)

Ändert sich die (allenfalls unbekannt) Standardabweichung eines X_1 einer Stichprobe (X_1, \dots, X_n) , wenn man das n erhöht?

Lösung:Nein (σ ist fix)**FS09 - Aufgabe 1b)**

Sei X eine $\mathcal{N}(2, 5)$ -Zufallsgrösse und Y eine $\text{Ge}(0.5)$ -Zufallsgrösse, X sei unabhängig von Y . Geben Sie den Erwartungswert und die Varianz von

$$3X - Y$$

an. Sie dürfen dazu Resultate aus dem Skript benutzen.

Lösung:

$$E(3X - Y) = 4 \quad V(3X - Y) = 47$$

FS07 - Aufgabe 1d)

Sei X eine $\mathcal{N}(4, 16)$ -Zufallsgrösse. Geben Sie $E[X^2] + E[X]^2$ an.

Lösung:

$$32 + 16 = 48$$

FS06 - Aufgabe 1c)

Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Zufallsgrösse und Y eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/2)$ -Zufallsgrösse. Die Zufallsgrössen seien unabhängig voneinander. Berechnen Sie die Standardabweichung von $X + Y$.

Lösung:

$$sd(X + Y) = \sigma\sqrt{3/2}$$

FS06 - Aufgabe 1d)

Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Zufallsgrösse und Y eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2/2)$ -Zufallsgrösse. Die Zufallsgrössen seien unabhängig voneinander. Berechnen Sie die Standardabweichung von $X - Y$.

Lösung:

$$sd(X - Y) = \sigma\sqrt{3/2}$$

FS06 - Aufgabe 1e)

Sei X eine $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ -Zufallsgrösse und $Y(\omega) := X(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Berechnen Sie die Standardabweichung von $X - Y$.

Lösung:

$$sd(X - Y) = 0$$