



MAT183 PVK

**1-Minuten-Aufgaben**

**bekannte Verteilungen  
(Grundlagen)**

Homepage / Webseite:

[www.mathcourses.ch/mat183.html](http://www.mathcourses.ch/mat183.html)

## ”Rechnen mit bekannten Verteilungen” 1-Minuten-Aufgaben

### FS14 - Aufgabe 1c)

$X$  sein Bin(100, 0.01)-verteilt. Sie wollen  $P[X = 2]$  berechnen. Benutzen Sie hierzu einerseits die exakte Rechnung, andererseits die bekannte Approximation mit Hilfe einer Poisson-Zufallsgrösse mit geeignet gewähltem Parameter.

Lösung:

$$\binom{100}{2} \cdot 0.01^2 \cdot 0.99^{98} \approx 0.185 \quad e^{-1} \frac{1^2}{2!} \approx 0.184$$

### Rep-FS15 - Aufgabe 1f)

Pro Woche wird in Zürich durchschnittlich ein/e Briefträger/in von einem Hund gebissen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in einer gegebenen Woche kein/e einzige/r Briefträger/in gebissen wird? Wählen Sie dazu das mit diesen wenigen Angaben einzig sinnvolle Modell aus der Vorlesung!

Lösung:

$$e^{-1} = 0.368$$

### Rep-FS15 - Aufgabe 1g)

Pro Woche wird in Zürich durchschnittlich ein/e Briefträger/in von einem Hund gebissen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in zwei Wochen kein/e einzige/r Briefträger/in gebissen wird? Wählen Sie dazu das mit diesen wenigen Angaben einzig sinnvolle Modell aus der Vorlesung!

Lösung:

$$e^{-2} = 0.135$$

### Rep-FS12 - Aufgabe 1c)

Wie gross ist bei einem fairen Würfel die Wahrscheinlichkeit, dass beim fünften Wurf zum ersten Mal eine 6 kommt?

Lösung:

$$(5/6)^4 \cdot (1/6) \approx 0.08$$

### Rep-FS12 - Aufgabe 1d)

Wie gross ist bei einem fairen Würfel die Wahrscheinlichkeit, dass zehn Mal hintereinander keine 6 kommt?

Lösung:

$$(5/6)^{10} \approx 0.162$$

**Rep-FS19-Aufgabe 1e)**

Sie haben eine faire Münze 10 mal geworfen und jedes Mal "Kopf" erhalten. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie erst beim 13. Mal (von Anfang an gerechnet) zum ersten Mal "Zahl" erhalten?

**Lösung:**

0.125

**Rep-FS21-Aufgabe 1e)**

Sie werfen einen fairen Würfel.  $X$  sei die benötigte Anzahl Würfe, bis zum dritten Mal eine 6 kommt. Wie ist der Erwartungswert von  $X$ ?

**Lösung:**

18

**FS13 - Aufgabe 1g)**

Man hat mit einem fairen Würfel schon 10 mal geworfen, ohne dass eine 6 kam. Wie lange dauert es jetzt noch im Durchschnitt, bis eine 6 kommt?

**Lösung:**6 mal (=  $1/p$ )**FS20-Aufgabe 3b.a)**

In der Schweiz hat es 15 % Linkshänder. Sie haben eine Klasse von 25 Personen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 7 Linkshänder hat?

**Lösung:** $\binom{25}{7} 0.15^7 0.85^{18}$ **FS20-Aufgabe 3b.b)**

In der Schweiz hat es 20 % Linkshänder. Sie haben eine Klasse von 15 Personen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es genau 5 Linkshänder hat?

**Lösung:** $\binom{15}{5} 0.2^5 0.8^{10}$ **Rep-FS22-Aufgabe 1e)**

Eine faire Münze wird 40'000 mal geworfen.  $X$  sei die Anzahl Kopf. Wie gross sind  $E[X]$  und  $V[X]$ ?

**Lösung:** $E[X] = 20'000, \quad V[X] = 10'000$

**Rep-FS17-Aufgabe 1c)**

Sei  $X$  eine  $\text{Ge}(0.5)$ -Zufallsgrösse. Wie gross ist  $P[\ln(X) \in [0, 1]]$ ?

Lösung:

3/4

**Rep-FS16 - Aufgabe 1c)**

Sei  $X$  eine  $\text{Bin}(3, 0.5)$ -Zufallsgrösse. Wie gross ist  $P[e^X \in [1, e^3]]$ ?

Lösung:

1 (=  $P[X \leq 3]$ )

**Rep-FS16 - Aufgabe 1d)**

Sei  $X$  eine  $\text{Bin}(4, 0.5)$ -Zufallsgrösse. Wie gross ist  $P[e^X \in [2, 4]]$ ?

Lösung:

$P[X = 1] = 0.25$

**FS13 - Aufgabe 1h)**

Sei  $X$  poissonverteilt mit Parameter  $\lambda \in \mathbb{N}$ . Berechnen Sie

$$P[X = \lambda] - P[X = \lambda - 1].$$

Lösung:

0

**Rep-FS16 - Aufgabe 1b)**

$X$  sei Poisson-verteilt mit Parameter  $\lambda$ , wo  $\lambda$  eine natürliche Zahl ist. Bei welcher Zahl  $k$  gilt:

$$P[X = k] = P[X = k - 1]?$$

Lösung:

bei  $\lambda = k$  (siehe ML)

**Rep-FS18-Aufgabe 1e)**

Geben Sie bei der Poisson-Verteilung

$$P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$$

Zahlen  $\lambda, k$  derart an, dass  $P(X = k) = P(X = k - 1)$ .

Lösung:

alle Zahlenbeispiele wo  $\lambda = k$  wobei  $k \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

## Wahrscheinlichkeiten berechnen von "X ± Y"

### Rep-FS22-Aufgabe 1d)

Sei  $X$  eine  $\chi_5^2$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(3,0.5)$ -Zufallsgrösse. Wir definieren  $Z = X + Y$ . Ist die Wahrscheinlichkeit  $P[Z = 3]$  gleich a) 0, b)  $\in (0, 1)$  oder c) 1?

Lösung:

0

### FS22-Aufgabe 1e)

Sei  $X$  eine  $F_{2,3}$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(3,0.5)$ -Zufallsgrösse. Wir definieren  $Z = X + Y$ . Ist die Wahrscheinlichkeit  $P[Z = 6]$  gleich a) 0, b)  $\in (0, 1)$  oder c) 1?

Lösung:

0

### FS22-Aufgabe 1f)

Sei  $X$  eine  $F_{5,6}$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(4,0.7)$ -Zufallsgrösse. Wir definieren  $Z = X + Y$ . Ist die Wahrscheinlichkeit  $P[Z = 5]$  gleich a) 0, b)  $\in (0, 1)$  oder c) 1?

Lösung:

0

### FS19-Aufgabe 1e)

Sei  $X$  eine  $\text{Ge}(0.5)$ -Zufallsgrösse (Vorsicht: welche Werte nimmt die  $\text{Ge}(p)$  an) und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(4,0.5)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie  $P[X + Y = 2]$ .

Lösung:

$$0.5 \binom{4}{1} 0.5^4 + 0.5^2 \binom{4}{0} 0.5^4 = 9/64$$

### Rep-FS20-Aufgabe 1d)

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(1, 2)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(10, 0.5)$ -Zufallsgrösse. Wir definieren  $Z := X - Y$ . Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit  $P[Z = -2]$ ?

Lösung:

0

**FS20-Aufgabe 4b.a)**

Sei  $X$  eine  $\text{Bin}(2,0.5)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(3,0.5)$ -Zufallsgrösse.

Berechnen Sie  $P[X + Y = 2]$ .

**Lösung:**

$$5/16 \quad (= P[X = 0, Y = 2] + P[X = 1, Y = 1] + P[X = 2, Y = 0])$$

**FS20-Aufgabe 4b.b)**

Sei  $X$  eine  $\text{Bin}(4,0.5)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Ge}(1/3)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie  $P[X + 2Y = 6]$ .

**Lösung:**

$$49/432 \quad (= P[X = 0, Y = 3] + P[X = 2, Y = 2] + P[X = 4, Y = 1])$$

**FS20-Aufgabe 4b.c)**

Sei  $X$  eine  $\text{Ge}(1/3)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(4,2/3)$ -Zufallsgrösse.

Berechnen Sie  $P[-X + Y = 1]$ .

**Lösung:**

$$472/2187 \quad (= P[X = 1, Y = 2] + P[X = 2, Y = 3] + P[X = 3, Y = 4])$$

**FS20-Aufgabe 4b.d)**

Sei  $X$  eine  $\text{Ge}(1/2)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(3,1/3)$ -Zufallsgrösse.

Berechnen Sie  $P[-X + 3Y = 2]$ .

**Lösung:**

$$817/3456 \quad (= P[X = 1, Y = 1] + P[X = 4, Y = 2] + P[X = 7, Y = 3])$$

**FS20-Aufgabe 4b.e)**

Sei  $X$  eine  $\text{Bin}(4, 1/2)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(2,2/3)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie  $P[X - Y = 1]$ .

**Lösung:**

$$11/36 \quad (= P[X = 1, Y = 0] + P[X = 2, Y = 1] + P[X = 3, Y = 2])$$

**Rep-FS19-Aufgabe 1c)**

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(1, 2)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\mathcal{N}(3, 4)$ -Zufallsgrösse. Was ist  $Z := X + Y$  für eine Zufallsgrösse? Geben Sie dazu entweder die Dichte, Verteilungsfunktion oder vollständige Bezeichnung an.

**Lösung:**

$Z$  ist eine  $\mathcal{N}(4, 6)$ -Zufallsgrösse

**Rep-FS19-Aufgabe 1d)**

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(1, 2)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\mathcal{N}(3, 4)$ -Zufallsgrösse. Was ist  $Z := X - Y$  für eine Zufallsgrösse? Geben Sie dazu entweder die Dichte, Verteilungsfunktion oder vollständige Bezeichnung an.

**Lösung:** $Z$  ist eine  $\mathcal{N}(-2, 6)$ -Zufallsgrösse**Rep-FS18-Aufgabe 1b)**

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(1, 9)$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\mathcal{N}(3, 16)$ -Zufallsgrösse. Sei  $Z := X + Y$ . Berechnen Sie  $P[Z \in [2, 7]]$ .

**Lösung:** $\approx 0.3811$ **Rep-FS21-Aufgabe 1d)**

Sei  $X$  eine  $\chi_3^2$ -Zufallsgrösse und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Ge}(0.5)$ -Zufallsgrösse. Wir definieren  $Z := X + Y$ . Ist die Wahrscheinlichkeit  $P[Z = 7]$  gleich a) 0, b)  $\in (0, 1)$  oder c) 1?

**Lösung:**

0

## 1-Minuten-Aufgaben zu "Was ist die Verteilung von ..."

### Rep-FS20-Aufgabe 1b)

Sei  $X$   $\text{Be}(0.6)$ -verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y := X - X^3$ ?

Lösung:

$P[Y = 0] = 1$

**FS17-Aufgabe 1e)** Sei  $X$  eine  $\text{Be}(p)$ -Zufallsgrösse. Wie ist die Verteilung von  $X^2$ ?

Lösung:

$\text{Be}(p)$

### Rep-FS14 - Aufgabe 1d)

Was für eine Verteilung hat  $Y := X^2$ , wenn  $X$  eine  $\text{Be}(0.5)$ -Zufallsgrösse ist? Bitte präzise Antwort.

Lösung:

$\text{Be}(0.5)$

### Rep-FS19-Aufgabe 1b)

Sei  $X$   $\text{Be}(0.5)$ -verteilt. Was ist die Wahrscheinlichkeitsfunktion von  $Y := X - X^2$ ?

Lösung:

Nimmt Wert 0 mit W'keit 1 an

### FS18-Aufgabe 1b)

Geben Sie eine Zufallsgrösse  $X$  an, welche mindestens 2 Werte mit Wahrscheinlichkeit grösser Null annimmt und für die gilt, dass  $X$  und  $X^2$  die gleiche Verteilung haben (gleiche Wahrscheinlichkeitsfunktion).

Lösung:

$\text{Be}(p)$

## ”VL-Skript Kapitel 6”

### Rep-FS16 - Aufgabe 1g)

Welche  $\chi^2$ -Verteilung entspricht genau welcher Exponentialverteilung (genaue Nennung von Parametern und Freiheitsgraden)?

Lösung:

$$\chi_2^2 = \exp(0.5)$$

### Rep-FS18-Aufgabe 1c)

Eine Forscherin stellt fest, dass in einer Untersuchung die Zeit bis zu einem nächsten Ereignis gedächtnislos ist. Wenn Sie lediglich diese Information haben: Welche beiden Verteilungen kommen mit dieser Information damit zur Modellierung der Übergangszeit überhaupt in Frage?

Lösung:

Ge( $p$ ) und  $\exp(\lambda)$

### FS21-Aufgabe 1k)

Geben Sie mit vollständiger Nennung der Parameter eine diskrete Verteilung an, die symmetrisch ist.

Lösung:

Be(0.5) oder Bin( $n$ , 0.5)

### FS21-Aufgabe 1f)

Nennen Sie 3 Verteilungen aus Kapitel 6, die symmetrisch sind.

Lösung:

Be(0.5) oder Bin( $n$ , 0.5), U[ $a$ , $b$ ], Normal,  $t_n$

### FS21-Aufgabe 1e)

Nennen Sie 3 Verteilungen aus Kapitel 6, die nur Werte grösser gleich 0 annehmen.

Lösung:

3 von Bernoulli, Binomial, Geometrisch, Poisson,  $\chi_n^2$ ,  $F_{n,m}$ , U[ $a \geq 0$ ,  $b$ ]

### FS21-Aufgabe 1l)

Welche beiden Verteilungen sind gedächtnislos?

Lösung:

geometrisch und exponentiell

**FS20-Aufgabe 2d)**

Bei welchem Paar von diskreten Verteilungen (in MAT 183) ist bei passender Wahl der Parameter die eine Verteilung ein Spezialfall der anderen Verteilung?

1.  $\text{Bin}(p)$  /  $\text{Ge}(p)$ ,
2.  $\text{Po}(\lambda)$  /  $\text{Be}(p)$ ,
3.  $\text{Bin}(n,p)$  /  $\text{Be}(p)$

Lösung:

3.

**FS20-Aufgabe 2e)**

Bei welchen *drei* diskreten Verteilungen (in MAT 183) ist bei passender Wahl der Parameter jeweils die eine Verteilung ein Spezialfall der anderen Verteilung?

1. Multinomial, Binomial,  $\text{Be}$ ;
2. Multinomial, Poisson,  $\text{Ge}$ ;
3. Poisson, Binomial, Uniform.

Lösung:

1.

**FS20-Aufgabe 2f)**

Bei welchem Paar von stetigen Verteilungen (in MAT 183) ist bei passender Wahl der Parameter die eine Verteilung ein Spezialfall der anderen Verteilung?

1.  $N$  und  $F$ ,
2.  $\chi^2$  und  $\exp$ ,
3.  $U$  und  $F$ .

Lösung:

2.

**FS21-Aufgabe 1g)**

Geben Sie 2 Zufallsgrößen  $X$  und  $Y$  aus Kapitel 6 an, sodass  $\sqrt{X} = |Y|$ .

Lösung:

$X \sim \chi_1^2$  und  $Y \sim \mathcal{N}(0, 1)$

**Rep-FS18-Aufgabe 1d)**

Bei welcher Wahrscheinlichkeit  $p$  ist die Varianz der Bernoulli-Verteilung  $\text{Be}(p)$  maximal? Wie ist es mit der Binomialverteilung  $\text{Bin}(n, p)$ ?

Lösung:

$p = 0.5$ , auch bei  $p = 0.5$

**Rep-FS20-Aufgabe 1c)**

Sei  $X$  eine  $\text{Bin}(10, 0.5)$ -Zufallsgröße und  $Y$  eine davon unabhängige  $\text{Bin}(3, 0.5)$ -Zufallsgröße. Was ist  $Z := X + Y$  für eine Zufallsgröße? Geben Sie entweder die Wahrscheinlichkeitsfunktion, Verteilungsfunktion oder die gebräuchliche vollständige Bezeichnung an.

Lösung:

$\text{Bin}(13, 0.5)$

**Rep-FS17-Aufgabe 1d)**

Nennen Sie aus Kapitel 6 in der Vorlesung zwei Zufallsgrößen, deren Quadrat auch in Kapitel 6 vorkommt. Geben Sie allfällige Parameter exakt an. Es reicht nicht, wenn man für das zweite Beispiel einfach andere Parameter der gleichen Verteilung wählt.

**Lösung:**

$$(Be(p))^2 = Be(p), \quad (\mathcal{N}(0,1))^2 = \chi_1^2$$

**FS21-Aufgabe 1i)**

Sei  $X$  eine  $\chi_1^2$ -Zufallsgröße. Begründen Sie mit einem Resultat aus Kapitel 6, warum  $2X$  keine  $\chi_2^2$ -Zufallsgröße sein kann.

**Lösung:**

$$V[2X] = 4V[X] = 4V[\chi_1^2] = 4 \cdot 2 = 8 \neq Var(\chi_2^2) = 4$$

**FS21-Aufgabe 1d)**

Sei  $X$  eine  $\chi_4^2$ - und  $Y$  eine davon unabhängige  $\chi_2^2$ -Zufallsgröße. Wie ist die Verteilung von  $X + Y$ ?

**Lösung:**

$$\chi_6^2$$

**FS21-Aufgabe 1c)**

Sei  $X$  eine  $\chi_2^2$ - und  $Y$  eine davon unabhängige  $\chi_5^2$ -Zufallsgröße. Wie ist die Verteilung von  $X + Y$ ?

**Lösung:**

$$\chi_7^2$$

# Normalverteilung 1-Minuten Aufgaben

## FS20-Aufgabe 2g)

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(3, 4)$ -Zufallsgrösse. Wo sind die Wendepunkte der Dichtefunktion?

Lösung:

bei 1 und 5

## FS08 - Aufgabe 1a)

Die Grösse von 25-jährigen Männern sei  $\mathcal{N}(175 \text{ cm}, 36 \text{ cm}^2)$ -verteilt. Wie viel Prozent der Männer sind grösser als 185 cm?

Lösung:

$1 - \Phi(5/3) \approx 0.05$

## FS08 - Aufgabe 1b)

In der Situation von a): wieviel Prozent der Männer grösser als 180 cm sind sogar grösser als 192cm?

Lösung:

$P(A|B) = \frac{\Phi(17/6)}{\Phi(5/6)} \approx 0.013$

## FS08 - Aufgabe 1c)

Sei  $X \sim \mathcal{N}(5, \sigma^2)$ -verteilt;  $P[X > 9] = 0.2$ . Berechnen Sie die Varianz.

Lösung:

$\sigma \approx 4.76$

## FS20-Aufgabe 2a)

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse. Vergleichen Sie die Grössen  $P[X^2 > 1]$  und  $P[|X| > 1]$ . Sind die Grössen a) gleich, b)  $P[X^2 > 1] > P[|X| > 1]$ , c)  $P[X^2 > 1] < P[|X| > 1]$ .

Lösung:

sie sind gleich

## FS20-Aufgabe 2b)

Sei  $X$  eine  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrösse. Vergleichen Sie die Grössen  $P[X^2 \in [-1, 1]]$  und  $P[X \in [-1, 1]]$ . Sind die Grössen a) gleich, b)  $P[X^2 \in [-1, 1]] > P[X \in [-1, 1]]$ , c)  $P[X^2 \in [-1, 1]] < P[X \in [-1, 1]]$

Lösung:

sie sind gleich

**Rep-FS14 - Aufgabe 1f)**

Sie wollen  $\int^{-(x-\mu)^2/2} dx$  angeben. In der Vorlesung wurde mehrfach gesagt, dass dies nicht so ohne weiteres geht.

Welche der unteren Antworten war der Grund?

- A) es geht zwar schon, ist aber zu kompliziert; deshalb gibt es hinten im Storrer eine Tabelle dazu.
- B) das Integral/die Stammfunktion ist nicht eindeutig.
- C) es gibt keine explizite Stammfunktion hierzu, welche uns aus der MAT 182 oder MAT 183 bekannt wäre (ausser  $\int_{-\infty}^a e^{-(x-\mu)^2/2} dx$  selber).

**Lösung:**

C)

**FS18-Aufgabe 1c)**

$X$  sei  $\mathcal{N}(0, 1)$ -verteilt. Bei welchem  $a$  gilt:  $P[X^2 > a] = 0.05$ ?

**Lösung:**

$1.96^2 = 3.8416$

## Chiquadrat-Verteilung

### FS10 - Aufgabe 1b)

Sei  $(X_i)_{i=1}^n$  eine Folge von  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrößen. Geben Sie die Verteilung von  $\sum_{i=1}^n X_i^2$  an.

Lösung:

$\chi_n^2$

### FS10 - Aufgabe 1c)

Sei  $(X_i)_{i=1}^n$  eine Folge von  $\mathcal{N}(0, 1)$ -Zufallsgrößen. Geben Sie die Verteilung von  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$  an, wo  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Lösung:

$\chi_{n-1}^2$

### FS10 - Aufgabe 1d)

Sei  $(X_i)_{i=1}^n$  eine Folge von  $\mathcal{N}(4, 25)$ -Zufallsgrößen. Geben Sie die Verteilung von  $\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2/25$  an, wo  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Lösung:

$\chi_{n-1}^2$

### FS10 - Aufgabe 1e)

Sei  $(X_i)_{i=1}^n$  eine Folge von  $\mathcal{N}(4, 25)$ -Zufallsgrößen. Geben Sie die Verteilung von  $\sum_{i=1}^n (X_i - 4)^2/25$  an, wo  $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ .

Lösung:

$\chi_n^2$

### FS16 - Aufgabe 1b)

$X_1$  sei eine  $\mathcal{N}(1, 1)$ -Zufallsgrösse,  $X_2$  eine  $\mathcal{N}(2, 4)$ -Zufallsgrösse und  $X_3$  sei eine  $\mathcal{N}(3, 9)$ -Zufallsgrösse. Alle 3 Zufallsgrößen seien unabhängig voneinander. Wie ist die Verteilung von

$$(X_1 - 1)^2/1 + (X_2 - 2)^2/4 + (X_3 - 3)^2/9?$$

Lösung:

$\chi_{df=3}^2$

**FS15 - Aufgabe 1d)**

Seien  $X_i$ ,  $1 \leq i \leq n$ , iid Zufallsgrößen aus der  $\mathcal{N}(3, 4)$ -Verteilung. Wie müssen Sie in

$$\sum_{i=1}^n (X_i - a)^2 / b$$

die Konstanten  $a$  und  $b$  wählen, damit eine bekannte Verteilung aus der Vorlesung entsteht? Welche Verteilung liegt damit vor?

**Lösung:**

$$a = 3, b = 4 \rightarrow \chi_n^2$$

**Rep-FS14 - Aufgabe 1b)**

Sei  $X$  eine standardnormalverteilte Zufallsgröße und  $Y$  eine davon unabhängige  $\chi_5^2$ -Zufallsgröße. Geben Sie  $P[X/Y \leq 0]$  an.

**Lösung:**

0.5 (da  $X$  symmetrisch um 0)

**FS19-Aufgabe 1c)**

Sei  $Y$  eine  $\chi_1^2$ -Zufallsgröße. Berechnen Sie ohne Taschenrechner mit Tabellen aus dem Storrer  $P[Y > 1.69]$ . Erklären Sie, wie Sie dies ohne Taschenrechner lösen konnten.

**Lösung:**

$$P[Y > 1.69] = 2 \cdot P[Z > \sqrt{1.69}] = 2(1 - \Phi(1.3)) = 0.1936$$

**FS22-Aufgabe 1g)**

Sei  $X$  eine  $\chi_1^2$ -Zufallsgröße. Geben Sie  $P[X \leq 3]$  an, mit Begründung

**Lösung:**

$$P[X \leq 3] = P[Z^2 \leq 3] = \Phi(\sqrt{3}) - \Phi(-\sqrt{3}) \approx 0.917$$

**FS22-Aufgabe 1h)**

Sei  $X$  eine  $\chi_1^2$ -Zufallsgröße. Geben Sie  $P[X \leq 2]$  an, mit Begründung

**Lösung:**

$$P[X \leq 2] = P[Z^2 \leq 2] = \Phi(\sqrt{2}) - \Phi(-\sqrt{2}) \approx 0.843$$

## t-Verteilung & Exponentialverteilung

### Rep-FS14 - Aufgabe 1c)

Was gibt es für eine Zufallsgrösse, wenn man bei  $t_n$  den Freiheitsgrad gegen unendlich gehen lässt? Bitte präzise Antwort.

Lösung:

$\mathcal{N}(0, 1)$

### Rep-FS11 - Aufgabe 1d)

$X$  habe eine t-Verteilung mit 7384 Freiheitsgraden. Geben Sie  $P[X > 1.96]$  an.

Lösung:

0.025 ( $t_{7384} \approx \mathcal{N}(0, 1)$ )

### FS12 - Aufgabe 1e)

Sei  $T$  die Dauer, bis ein Atom zerfällt. Wir modellieren die Zeit bis zum Zerfall mit einer exponentialverteilten Zufallsgrösse mit Parameter  $\lambda > 0$ . Die Dichtefunktion ist also auf  $[0, \infty)$  gleich  $\lambda \exp(-\lambda t)$  und gleich 0 sonst. Angenommen, das Atom ist langlebig; ist dann  $\lambda$  eher gross oder eher klein?

Lösung:

eher klein

### Rep-FS16 - Aufgabe 1f)

Bei einer Exponentialverteilung sei der Parameter  $\lambda = \ln 2$ . Wie gross ist der Median?

Lösung:

Median =  $\frac{\ln(2)}{\lambda} = 1$

### FS07 - Aufgabe 1h)

Plutonium 239 hat eine Halbwertszeit von etwa 24'000 Jahren. Wir gehen davon aus, dass keine nuklearen Interventionen stattfinden. Wie lange dauert es dann durchschnittlich, bis ein ausgewähltes Plutonium-239-Atom zerfällt?

Lösung:

$E(X) = \frac{24000}{\ln(2)} \approx 34'625$  Jahre

FS17-Aufgabe 1h) Sei  $X$  eine  $\exp(2)$ -Zufallsgrösse. Berechnen Sie  $P[2^X + 2 \leq 3]$ .

Lösung:

$P[X \leq 0] = 0$

## Uniform-Verteilung $U[a, b]$

### FS14 - Aufgabe 1f)

Sei  $X$  eine  $U[0,1]$ -Zufallsgrösse. Wie ist die Verteilung von  $2X - 3$ ?

Lösung:

$U[-3, -1]$

### FS16 - Aufgabe 1c)

$X$  sei  $U[1, 3]$ -verteilt. Wie ist der Median von  $1/X$ ?

Lösung:

$\tilde{x} = 1/2$

### FS15 - Aufgabe 1c)

$X$  sei  $U[2, 4]$ -verteilt. Wie ist der Median von  $(X - 4)/8$ ?

Lösung:

Median bei  $-1/8$

### FS18-Aufgabe 1e)

Sei  $X$  eine  $U[0, 1]$ -Zufallsgrösse. Wie ist  $P[X = 1]$ ?

Lösung:

0 (da stetig)

FS17-Aufgabe 1c)  $X$  sei  $U[0, 1]$ -verteilt. Wie ist  $P[1/X > 3]$ ?

Lösung:

$P[X < 1/3] = 1/3$

FS17-Aufgabe 1d)  $X$  sei  $U[0, 1]$ -verteilt. Es gelte mit  $b > 1$ , dass  $P[1/X > b] = 1/c$ . Wie ist der Zusammenhang zwischen  $b$  und  $c$ ?

Lösung:

$b = c$