Mathe1 Crash Kurs

Ableiten

Aufgaben + Lösungen

(HS23)

Inhaltsverzeichnis:

Homepage / Webseite:

`www.mathcourses.ch/mathe1.html`

MathCourses

www.mathcourses.ch/mat182.html

MAT182 Zwischenkurs 1

Algebra

(Grundlagen)

MathCourses
www.mathcourses.ch/mat182.html

Formelsammlung MAT182

1 Wichtigste Algebra-Grundlagen

1.1 Potenzgesetze

1. $(ab)^n = a^n \cdot b^n \qquad (\frac{a}{b})^n = \frac{a^n}{b^n}$
2. $a^n \cdot a^m = a^{n+m} \qquad \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m} \qquad (a^m)^n = a^{m \cdot n} = (a^n)^m$
3. $a^0 = 1 \qquad 1^n = 1$
4. $a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$
5. $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$

1.2 Logarithmusgesetze

Hinweis: Falls nur log(...) steht, meinen Mathematiker oft ln(...)

1. $\log x + \log y = \log(x \cdot y) \qquad \log x - \log y = \log(\frac{x}{y}) \qquad n \cdot \log x = \log(x^n)$
2. $e^{\ln x} = x = \ln e^x$ (falls nichts zwischen e und ln ist!! Sonst zuerst Potenz-/Logarithmengesetze anwenden!)
3. $\ln(e) = 1 \qquad \log_b(1) = 0$
4. $b^{\log_b(x)} = x = \log_b(b^x)$
5. Definition $\qquad y = b^x \Leftrightarrow \log_b(y) = x$
6. $\log_b(x) = \frac{\log_a(x)}{\log_a(b)}$ (Basiswechselsatz)

Hausaufgaben-Empfehlung vor dem PVK: "Vorarbeit_PVK_Grundlagen-Algebra" (PDF siehe Homepage)

	$\boldsymbol{\frac{1}{x^r} = x^{-r}}$	$\boldsymbol{\sqrt[n]{x^k} = x^{\frac{k}{n}}}$	$\boldsymbol{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$	$\boldsymbol{\frac{e}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{e}{1}\right)}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{e}{1} \cdot \frac{g}{f}}$	$\boldsymbol{\left(x^a\right)^c = x^{a \cdot c}}$
1.	$\frac{1}{x^2} =$	$\sqrt{x} =$	$x^7 \cdot x^3 =$	$\frac{8}{\frac{3}{5}} =$	$\left(x^3\right)^2 =$
2.	$\frac{1}{x^5} =$	$\sqrt[3]{x} =$	$x \cdot \sqrt{x} =$	$\frac{4}{\frac{2}{x^2}} =$	$\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^5 =$
3.	$\frac{3}{x^2} =$	$\sqrt[5]{x^4} =$	$\sqrt[4]{x^3} \cdot x^{-2} =$	$\frac{1}{\frac{x}{3}} =$	$\sqrt[7]{x^{\frac{5}{2}}} =$
4.	$\frac{1}{3x^2} =$	$\sqrt{4x} =$	$\boldsymbol{x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$	$\frac{x}{\frac{5}{4}} =$	$\left(\sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)^2 =$
5.	$\frac{11}{13x^5} =$	$\sqrt[4]{16x^8} =$	$\frac{x^5}{x^3} =$	$\frac{3x}{\frac{3}{7}} =$	$\left(4x^5\right)^2 =$
6.	$\frac{2}{x^{-3}} =$	Formel rückwärts angewendet $x^{\frac{2}{3}} =$	$\frac{x^{12}}{x^4} =$	$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{9}} =$	$\left(\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{3}{x^{-5}}}\right)^{\sqrt{3}} =$
7.	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} =$	Formel rückwärts angewendet $4x^{-\frac{5}{2}} =$	$\frac{2x^3}{x^6} =$	$\frac{\frac{13x}{5}}{\frac{2}{3}} =$	

$\ln(\mathbf{a})+\ln(\mathbf{b})=\ln(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$	$\ln(\mathbf{a})-\ln(\mathbf{b})=\ln\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)$	$\mathbf{c}\cdot\ln(\mathbf{a})=\ln\left(\mathbf{a^c}\right)$	$\sqrt{\mathbf{a}}\cdot\sqrt{\mathbf{b}}=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}$	**Wissen**
$\ln(y)+\ln(y^2)=$	$\ln(y)-\ln(y^2)=$	$3\ln(y)=$	$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}=$	$x^0=$
$\ln(y)+\ln(3)=$	$\ln(z)-\ln\left(\frac{1}{5}\right)=$	$-\ln(a)=$	$\sqrt{4x^3}=$	$\ln(1)=$
$\ln\left(\frac{x}{3}\right)+\ln\left(12xy\right)=$	$\ln(u)-\ln\left(3\sqrt{u}\right)=$	$-\frac{1}{4}\ln(16x^2)=$	$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x^3}=$	$e^0=$
$\mathbf{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$	$\mathbf{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$	$\mathbf{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}=\sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$	**Fehler-quellen**
$(x+3)^2=$	$(2y-1)^2=$	$(y^3+11)(y^3-11)=$	$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^9}}=$	$\sqrt{a+b}$ $=$
$y^2+2y+1=$	$x^2-10x+25=$	$b^2-1=$	$\frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{3x}}=$	$\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$ $=$
$y^4+4y^2+4=$	$a^2-a+\frac{1}{4}=$	$9x^4-25=$	$\frac{\sqrt{x^4-16}}{\sqrt{x+2}}=$	

	$\mathbf{\frac{1}{x^r} = x^{-r}}$	$\sqrt[n]{x^k} = \mathbf{x^{\frac{k}{n}}}$	$\mathbf{x^a \cdot x^b = x^{a+b}}$	$\mathbf{\frac{e}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{\left(\frac{e}{1}\right)}{\left(\frac{f}{g}\right)} = \frac{e}{1} \cdot \frac{g}{f}}$	$\mathbf{\left(x^a\right)^c = x^{a \cdot c}}$
1.	$\frac{1}{x^2} = x^{-2}$	$\sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}$	$x^7 \cdot x^3 = x^{7+3} = x^{10}$	$\frac{8}{\frac{3}{5}} = \frac{8}{1} \cdot \frac{5}{3} = \frac{40}{3}$	$\left(x^3\right)^2 = x^{3 \cdot 2} = x^6$
2.	$\frac{1}{x^5} = x^{-5}$	$\sqrt[3]{x} = x^{\frac{1}{3}}$	$x \cdot \sqrt{x} = x^1 \cdot x^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{3}{2}}$	$\frac{4}{\frac{2}{x^2}} = \frac{4}{1} \cdot \frac{x^2}{2} = \frac{4x^2}{2} = 2x^2$	$\left(x^{\frac{1}{4}}\right)^5 = x^{\frac{1}{4} \cdot 5} = x^{\frac{5}{4}}$
3.	$\frac{3}{x^2} = 3 \cdot \frac{1}{x^2} = 3 \cdot x^{-2}$	$\sqrt[5]{x^4} = x^{\frac{4}{5}}$	$\sqrt[4]{x^3} \cdot x^{-2} = x^{\frac{3}{4} - \frac{8}{4}} = x^{-\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{\frac{x}{3}} = \frac{1}{1} \cdot \frac{3}{x} = \frac{3}{x}$	$\sqrt[7]{x^{\frac{5}{2}}} = \left(x^{\frac{5}{2}}\right)^{\frac{1}{7}} = x^{\frac{5}{14}}$
4.	$\frac{1}{3x^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{x^2} = \frac{1}{3} \cdot x^{-2}$	$\sqrt{4x} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{x} = 2 \cdot x^{\frac{1}{2}}$	$\mathbf{x^a : x^b = \frac{x^a}{x^b} = x^{a-b}}$	$\frac{x}{\frac{5}{4}} = \frac{x}{1} \cdot \frac{4}{5} = \frac{4}{5} \cdot x = \frac{4x}{5}$	$\left(\sqrt{3} \cdot x^{\frac{3}{2}}\right)^2 = 3 \cdot x^3$
5.	$\frac{11}{13x^5} = \frac{11}{13} \cdot \frac{1}{x^5} = \frac{11}{13} x^{-5}$	$\sqrt[4]{16x^8} = \sqrt[4]{2^4}\sqrt[4]{x^8} = 2 \cdot x^2$	$\frac{x^5}{x^3} = x^{5-3} = x^2$	$\frac{3x}{\frac{3}{7}} = \frac{3x}{1} \cdot \frac{7}{3} = \frac{21x}{3} = 7x$	$\left(4x^5\right)^2 = 4^2 \left(x^5\right)^2 = 16x^{10}$
6.	$\frac{2}{x^{-3}} = 2 \cdot \frac{1}{x^{-3}} = 2x^3$	Formel rückwärts angewendet $x^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{x^2}$	$\frac{x^{12}}{x^4} = x^8$	$\frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{9}} = \frac{7}{3} \cdot \frac{9}{2} = \frac{63}{6} = \frac{21}{2}$	$\left(\frac{\frac{x^2}{3}}{\frac{3}{x^{-5}}}\right)^{\sqrt{3}} = \left(\frac{x^{-3}}{9}\right)^{\sqrt{3}}$
7.	$\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{1}{(x)^{\frac{1}{3}}} = x^{-\frac{1}{3}}$	Formel rückwärts angewendet $4x^{-\frac{5}{2}} = 4 \cdot \frac{1}{x^{\frac{5}{2}}} = \frac{4}{\sqrt[2]{x^5}}$	$\frac{2x^3}{x^6} = 2 \cdot \frac{x^3}{x^6} = 2 \cdot x^{-3}$	$\frac{\frac{13x}{5}}{\frac{2}{3}} = \frac{13x}{5} \cdot \frac{3}{2} = \frac{39x}{10}$	theor. $= \frac{\left(x^{-3}\right)^{\sqrt{3}}}{(9)^{\sqrt{3}}} = \frac{x^{-3 \cdot \sqrt{3}}}{9^{\sqrt{3}}}$

$\ln(\mathbf{a})+\ln(\mathbf{b})=\ln(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$	$\ln(\mathbf{a})-\ln(\mathbf{b})=\ln\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)$	$\mathbf{c}\cdot\ln(\mathbf{a})=\ln\left(\mathbf{a}^{\mathbf{c}}\right)$	$\sqrt{\mathbf{a}}\cdot\sqrt{\mathbf{b}}=\sqrt{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}$	**Wissen**
$\ln(y)+\ln(y^2)=\ln(y^3)$	$\ln(y)-\ln(y^2)=\ln\left(y^{-1}\right)$	$3\ln(y)=\ln\left(y^3\right)$	$\sqrt{x}\cdot\sqrt{x^3}=\sqrt{x^4}=x^2$	$x^0=1$
$\ln(y)+\ln(3)=\ln(3y)$	$\ln(z)-\ln\left(\frac{1}{5}\right)=\ln(5z)$	$-\ln(a)=\ln\left(a^{-1}\right)$	$\sqrt{4x^3}=\sqrt{4}\cdot\sqrt{x^3}=2x^{\frac{3}{2}}$	$\ln(1)=0$
$\ln\left(\frac{x}{3}\right)+\ln(12xy)=\ln\left(4x^2y\right)$	$\ln(u)-\ln\left(3\sqrt{u}\right)=\ln\left(\frac{\sqrt{u}}{3}\right)$	$-\frac{1}{4}\ln(16x^2)=\ln\left(\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)$	$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt{x^3}=\sqrt[6]{x^{11}}$	$e^0=1$
$\mathbf{a^2+2ab+b^2=(a+b)^2}$	$\mathbf{a^2-2ab+b^2=(a-b)^2}$	$\mathbf{a^2-b^2=(a+b)(a-b)}$	$\frac{\sqrt{\mathbf{a}}}{\sqrt{\mathbf{b}}}=\sqrt{\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}}$	**Fehler-quellen**
$(x+3)^2=x^2+6x+9$	$(2y-1)^2=4y^2-4y+1$	$(y^3+11)(y^3-11)=y^6-121$	$\frac{\sqrt{x^5}}{\sqrt{x^9}}=\sqrt{x^{-4}}=\frac{1}{x^2}$	$\sqrt{a+b}$ $=\sqrt{a+b}$ $\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$ $=\frac{\ln(x^2+1)}{\ln(x)}$
$y^2+2y+1=(y+1)^2$	$x^2-10x+25=(x-5)^2$	$b^2-1=(b+1)(b-1)$	$\frac{\sqrt{4x^2}}{\sqrt{3x}}=\sqrt{\frac{4x^2}{3x}}=\sqrt{\frac{4x}{3}}$	
$y^4+4y^2+4=(y^2+2)^2$	$a^2-a+\frac{1}{4}=\left(a-\frac{1}{2}\right)^2$	$9x^4-25=(3x^2+5)(3x^2-5)$	$\frac{\sqrt{x^4-16}}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{(x^2+4)(x-2)}$	

MathCourses

www.mathcourses.ch/mathe1.html

MAT182 Zwischenkurs 1

Ableiten

(Grundregeln)

Vorzeigeaufgaben: $f(x) = \frac{3e^x}{5} + x - \sqrt{x} - 3$ $h(x) = \ln(x)\cos(x)$ $h(x) = \frac{10^x}{4x-3}$ $k(x) = e^{(x^3)}$

Grundwissen

1. $f(x) = x^n$ Lösung: nx^{n-1}
2. $f(x) = \frac{1}{x^3}$ Lösung: $-3x^{-4}$
3. $f(x) = \frac{5}{6x^2}$ Lösung: $\frac{-5}{3x^3}$
4. $f(x) = \sin(x)$ Lösung: $\cos(x)$
5. $f(x) = 3\cos(x)$ Lösung: $-3\sin(x)$
6. $f(x) = \frac{e^x}{2}$ Lösung: $\frac{e^x}{2}$
7. $f(x) = \ln(x)$ Lösung: $\frac{1}{x}$
8. $f(x) = \sqrt{x}$ Lösung: $\frac{1}{2\sqrt{x}}$

Produktregel

1. $f(x) = xe^x$ Lösung: $e^x + xe^x = e^x(x+1)$
2. $f(x) = (3x^2 + x - 2)e^x$ Lösung: $e^x(3x^2 + 7x - 1)$
3. $f(x) = x^2\sin(x)$ Lösung: $2x\sin(x) + x^2\cos(x)$
4. $f(x) = (x^2 - 2)\sin(x)$ Lösung: $2x\sin(x) + (x^2 - 2)\cos(x)$
5. $f(x) = x^3\cos(x)$ Lösung: $3x^2\cos(x) - x^3\sin(x)$
6. $f(x) = (x^3 - 2x + 1)\cos(x)$ Lösung: $(3x^2 - 2)\cos(x) - (x^3 - 2x + 1)\sin(x)$

Quotientenregel

1. $f(x) = \frac{x^2+1}{2x+3}$ Lösung: $\frac{2x^2+6x-2}{(2x+3)^2}$
2. $f(x) = \frac{x}{x-1}$ Lösung: $\frac{-1}{(x-1)^2}$
3. $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ Lösung: $\frac{-x^2+2x+1}{(x^2+1)^2}$
4. $f(x) = \frac{e^x}{x^3}$ Lösung: $\frac{e^x(x-3)}{x^4} = \frac{e^x x^3 - 3x^2 e^x}{x^6}$
5. $f(x) = \frac{3x}{x^2-1}$ Lösung: $\frac{-3x^2-3}{(x^2-1)^2} = \frac{-3(x^2+1)}{(x^2-1)^2}$
6. $f(x) = \frac{2x}{(x-1)^2}$ Lösung: $\frac{2(x-1)^2 - 2x(2(x-1))}{(x-1)^4} = \frac{-2(x+1)}{(x-1)^3}$
7. $f(x) = \frac{x^2}{\cos(x)}$ Lösung: $\frac{2x\cos(x) + x^2\sin(x)}{\cos^2(x)}$
8. $f(x) = \frac{x^2+2x}{\ln(x)}$ Lösung: $\frac{(2x+2)\cdot\ln(x) - x - 2}{(\ln(x))^2}$

Kettenregel

1. $f(x) = (x^2+1)^3$ Lösung: $6x(x^2+1)^2$
2. $f(x) = (2x^2+3x-1)^3$ Lösung: $(12x+9)(2x^2+3x-1)^2$
3. $f(x) = \sqrt{3x-1}$ Lösung: $\frac{3}{2\sqrt{3x-1}}$
4. $f(x) = \sqrt{2x^2+x-3}$ Lösung: $\frac{4x+1}{2\sqrt{2x^2+x-3}}$
5. $f(x) = \sin(x^2-3x)$ Lösung: $(2x-3)\cos(x^2-3x)$
6. $f(x) = \cos(x^3+1)$ Lösung: $-3x^2\sin(x^3+1)$
7. $f(x) = e^{3x-1}$ Lösung: $3e^{3x-1}$
8. $f(x) = e^{-x^2}$ Lösung: $-2xe^{-x^2}$
9. $f(x) = 10^{-x}$ (Formel für $(a^x)'$ nachschauen!) Lösung: $-\ln(10)\cdot 10^{-x}$
10. $f(x) = \ln(2x-3)$ Lösung: $\frac{2}{2x-3}$

Vermischt 1 (selber erkennen wie ableiten)

1. $\frac{3}{\cos(x)}$ Lösung: $\frac{3\sin(x)}{\cos^2(x)}$
2. $\frac{x^2}{\ln(x)}$ Lösung: $\frac{2x\ln(x)-x}{(\ln(x))^2}$
3. $\cos(\sqrt{x})$ Lösung: $\frac{-\sin(\sqrt{x})}{2\sqrt{x}}$
4. $\cos^3(x)$ Lösung: $-3\sin(x)\cos^2(x)$
5. e^{2x} Lösung: $2e^{2x}$
6. $\ln(3x)$ Lösung: $\frac{1}{x}$
7. $3x\cos(x)$ Lösung: $3\cos(x) - 3x\sin(x)$
8. e^{x^2} Lösung: $2xe^{x^2}$
9. $\sin(3x^2)$ Lösung: $6x\cos(3x^2)$
10. $\dfrac{x^2}{-x^3+6x-4}$ Lösung: $\frac{x^4+6x^2-8x}{(-x^3+6x-4)^2}$

Prüfungs-Level Aufgaben

a) $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}$

b) $f(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}}$

c) $f(x) = e^{x^3} \ln(x^2)$

d) $f(x) = \sqrt{e^{x^3}} + \sin(x)$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

f) $f(x) = e^{(\ln(x))^2+C}$

g) $f(x) = \big(\sin(x^2)\big)^3$

h) $f(x) = \big(\sin(\cos(x^3+1))\big)^2$

i) $f(x) = \ln \dfrac{x}{x^2-3x}$

Lösungen Prüfungsaufgaben:

a) $f'(x) = \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) x e^{x^2} + \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2} 2x = x e^{x^2} \left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)$

b) $f'(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}$

c) $f'(x) = e^{x^3} \left(3x^2 \ln(x^2) + \frac{2}{x}\right)$

d) $f'(x) = \frac{3x^2 e^{x^3}}{2\sqrt{e^{x^3}}} + \cos(x) = \frac{3}{2} x^2 \sqrt{e^{x^3}} + \cos(x)$

e) $f'(x) = \frac{1}{3} \cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

f) $f'(x) = e^{(\ln(x))^2+C} \cdot \frac{2\ln(x)}{x}$

g) $f'(x) = 3 \cdot (\sin(x^2))^2 \cdot \cos(x^2) \cdot 2x$

h) $f'(x) = 2\sin\big(\cos(x^3+1)\big) \cdot \cos\big(\cos(x^3+1)\big) \cdot (-\sin(x^3+1)) \cdot 3x^2$

i) $f'(x) = \frac{x^2-3x-x(2x-3)}{x(x^2-3x)} = \frac{-1}{x-3}$

MathCourses

www.mathcourses.ch/mathe1.html

MAT182 Zwischenkurs 1

Lösungen

(Prüfungslevel-Aufgaben)

a) $f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) e^{x^2}$

$$f(x) = \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{x^2} \qquad \Big| \text{ Produktregel}$$

Kettenregel   Produkt regel   Kettenregel

$$f'(x) = \left(\sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)' \cdot e^{x^2} + \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(e^{x^2}\right)' \qquad \Big| \text{ Kettenregel}$$

$$= \left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \frac{2x}{2}\right) \cdot e^{x^2} + \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot \left(e^{x^2} \cdot 2x\right)$$

$$= \underline{\underline{x \cdot \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{x^2} + 2x \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) \cdot e^{x^2}}}$$

ev. noch vereinfachen

$$= \underline{\underline{x \cdot e^{x^2} \cdot \left(\cos\left(\frac{x^2}{2}\right) + 2 \cdot \sin\left(\frac{x^2}{2}\right)\right)}}$$

b) $f(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}}$

$$f(x) = \underbrace{e}_{\text{äussere Fn.}}{}^{\overbrace{\sqrt{1+\sin(x)}}^{\text{Innere Fn.}}} \qquad \Big|\ \text{Kettenregel}$$

$$f'(x) = \underbrace{e^{\sqrt{1+\sin(x)}}}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1+\sin(x)}\right)'}_{\text{innere Abl.} = \left(\underbrace{(1+\sin(x))}_{\text{innere Fn.}}{}^{\frac{1}{2}}\right)'} \qquad \Big|\ \text{Kettenregel}$$

äussere Fn.

$$f'(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left(1+\sin(x)\right)'$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{1}{2}\left(1+\sin(x)\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \cos(x)$$

$$f'(x) = e^{\sqrt{1+\sin(x)}} \cdot \frac{\cos(x)}{2\sqrt{1+\sin(x)}}$$

c) $f(x) = e^{x^3} \ln(x^2)$

$$f(x) = e^{x^3} \cdot \ln(x^2) \qquad \text{| Produktregel}$$

$$f'(x) = (e^{x^3})' \cdot \ln(x^2) + e^{x^3} \cdot (\ln(x^2))' \qquad \text{| Kettenregel}$$

$$f'(x) = (e^{x^3} \cdot 3x^2) \cdot \ln(x^2) + e^{x^3} \cdot \underbrace{\left(\frac{1}{x^2} \cdot 2x \right)}_{\frac{2x}{x^2} = \frac{2}{x}} \qquad \text{| vereinfachen}$$

$$f'(x) = e^{x^3} \cdot 3x^2 \ln(x^2) + e^{x^3} \cdot \frac{2}{x} \qquad \text{| ausklammern}$$

$$f'(x) = e^{x^3} \cdot \left(3x^2 \ln(x^2) + \frac{2}{x} \right)$$

d) $f(x) = \sqrt{e^{x^3}} + \sin(x)$

$$f(x) = \underbrace{\sqrt{e^{x^3}}}_{(e^{x^3})^{\frac{1}{2}}} + \sin(x) \qquad | \text{Kettenregel}$$

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2}(e^{x^3})^{-\frac{1}{2}}}_{\substack{\text{äussere Abl.} \\ = \frac{1}{2\sqrt{e^{x^3}}}}} \cdot \underbrace{(e^{x^3})'}_{\text{innere Abl.}} + \cos(x) \qquad | \text{Kettenregel}$$

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{x^3}}} \cdot (e^{x^3} \cdot 3x^2) + \cos(x) \qquad | \text{vereinfachen}$$

$$f'(x) = \frac{e^{x^3} \cdot 3x^2}{2\sqrt{e^{x^3}}} + \cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{3x^2}{2} \cdot \underbrace{\frac{e^{x^3}}{\sqrt{e^{x^3}}}}_{= \frac{\cancel{\sqrt{e^{x^3}}} \cdot \sqrt{e^{x^3}}}{\cancel{\sqrt{e^{x^3}}}} = \sqrt{e^{x^3}}} + \cos(x)$$

$$f'(x) = \frac{3}{2} \cdot x^2 \cdot \sqrt{e^{x^3}} + \cos(x)$$

e) $f(x) = \sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)$

$$\sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)' = \cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right) \cdot \underbrace{\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)'}$$

Bem.: Theoretisch zwar mit Quotientenregel machbar (siehe weiter unten), aber eher direkt gedacht:

Vereinfachen zu:

$$\frac{x-\ln(2)}{3} = \frac{x}{3} - \frac{\ln(2)}{3}$$

reine Zahl / Konstante

$$\rightarrow \left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)' = \frac{1}{3} - 0$$

$\Leftarrow$

$$\sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)' = \cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right) \cdot \left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)'$$

$$= \underline{\underline{\cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}}}$$

Mit Quotientenregel:

$$\sin\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)' = \cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right) \cdot \left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right)'$$

$$= \cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right) \cdot \frac{(1-0)\cdot 3 - \overbrace{(x-\ln(2))\cdot 0}^{=0}}{(3)^2}$$

$$= \cos\left(\frac{x-\ln(2)}{3}\right) \cdot \frac{1}{3}$$

f) $f(x) = e^{(\ln(x))^2+C}$

$$f(x) = e^{(\ln(x))^2 + C} \qquad \text{| Kettenregel}$$

$$f'(x) = e^{(\ln(x))^2+C} \cdot \left((\ln(x))^2 + C \right)' \qquad \text{| Kettenregel}$$

$$f'(x) = e^{(\ln(x))^2+C} \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot (\ln(x))'$$

$$f'(x) = e^{(\ln(x))^2+C} \cdot 2 \cdot \ln(x) \cdot \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = e^{(\ln(x))^2+C} \cdot \frac{2 \cdot \ln(x)}{x}$$

g) $f(x) = \left(\sin(x^2)\right)^3$

$$f(x) = \left(\sin(x^2)\right)^3 \qquad \text{| Kettenregel}$$

$$f'(x) = 3 \cdot \left(\sin(x^2)\right)^2 \cdot \left(\sin(x^2)\right)' \qquad \text{| Kettenregel}$$

äussere Fn. innere Fn.

$$f'(x) = 3 \cdot \left(\sin(x^2)\right)^2 \cdot \underbrace{\cos(x^2)}_{\text{äussere Abl.}} \cdot \underbrace{2x}_{\text{Innere Abl.}}$$

$$f'(x) = 6x \cdot \cos(x^2) \cdot \left(\sin(x^2)\right)^2$$

h) $f(x) = \left(\sin(\cos(x^3+1))\right)^2$

$$f(x) = \Big(\underbrace{\sin(\cos(x^3+1))}_{\text{innere Fn.}} \Big)^2 \quad \text{äussere Fn.} \qquad \Big| \text{Kettenregel}$$

$$f'(x) = 2\big(\sin(\cos(x^3+1))\big) \cdot \big(\sin(\cos(x^3+1))\big)' \qquad \Big| \text{Kettenregel}$$

$$f'(x) = 2\big(\sin(\cos(x^3+1))\big) \cdot \cos(\cos(x^3+1)) \cdot \big(\cos(x^3+1)\big)'$$

$$\Big| \text{Kettenregel}$$

$$f'(x) = 2\big(\sin(\cos(x^3+1))\big) \cdot \cos(\cos(x^3+1)) \cdot (-\sin(x^3+1)) \cdot 3x^2$$

$$f'(x) = -6x^2 \cdot \sin(\cos(x^3+1)) \cdot \cos(\cos(x^3+1)) \cdot \sin(x^3+1)$$

i) $f(x) = \ln \frac{x}{x^2 - 3x}$

$$f(x) = \ln\left(\frac{x}{x^2-3x}\right)$$ | Kettenregel

$$f'(x) = \frac{1}{\frac{x}{x^2-3x}} \cdot \left(\frac{x}{x^2-3x}\right)'$$ | Quotientenregel

$$\frac{1}{\text{Bruch}} = \text{Kehrbruch}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-3x}{x} \cdot \frac{1\cdot(x^2-3x) - x\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^2}$$

| vereinfachen (faktorisieren, kürzen, ausmultiplizieren)

$$f'(x) = \frac{\cancel{(x^2-3x)}}{x} \cdot \frac{1\cdot(x^2-3x) - x\cdot(2x-3)}{(x^2-3x)^{\cancel{2}}}$$

$$f'(x) = \frac{x^2-3x - x\cdot(2x-3)}{x(x^2-3x)}$$

| idealerweise ausklammern vor ausmultiplizieren

$$f'(x) = \frac{x(x-3) - x\cdot(2x-3)}{x(x^2-3x)}$$

$$f'(x) = \frac{\cancel{x}\cdot\left((x-3)-(2x-3)\right)}{\cancel{x}(x^2-3x)} = \frac{x-3-2x+3}{(x^2-3x)}$$

$$f'(x) = \frac{-x}{(x^2-3x)} = \frac{\cancel{x}\cdot(-1)}{\cancel{x}(x-3)} = \frac{-1}{x-3}$$